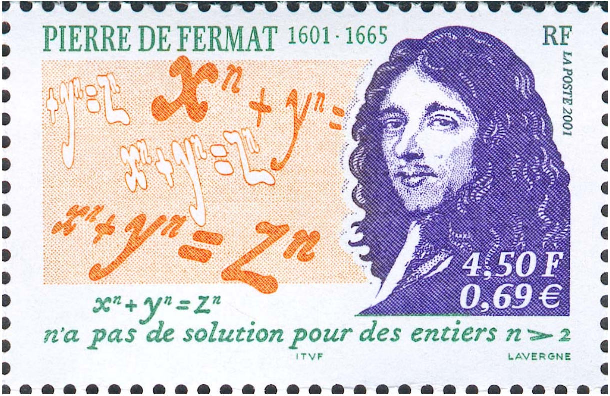


Leçon 53 - Continuité

17 janvier 2025

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d’une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problème Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problème Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Problème Fonction nulle part continue ?

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problème Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Problème Fonction nulle part continue ?

Problème Image d'un intervalle par une fonction continue ?

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problème Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Problème Fonction nulle part continue ?

Problème Image d'un intervalle par une fonction continue ?

Problème Continuité prolongée

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Limite

I est toujours un intervalle.
Rappel : définition de voisinage ?

Limite

I est toujours un intervalle.
Rappel : définition de voisinage ?

Définition - Limite

Soient f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité (éventuellement infinie) de I.
On dit que f tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers a si

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

ou de manière équivalente :

$$\forall\ W \in \mathcal{V}_\ell,\ f^{-1}(W) := \{x \mid f(x) \in W\} \in \mathcal{V}_a\ .$$

On note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarques

Remarque Rappel sur les images réciproques.

Remarques

Remarque Rappel sur les images réciproques.

Analyse - Pourquoi ces deux définitions sont équivalentes ?

Remarques

Remarque Rappel sur les images réciproques.

Analyse - Pourquoi ces deux définitions sont équivalentes ?

Exemple $x \mapsto x \ln x$

Remarques

Remarque Rappel sur les images réciproques.

Analyse - Pourquoi ces deux définitions sont équivalentes ?

Exemple $x \mapsto x \ln x$

Attention. L'importance de l'intervalle de définition

Notons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

En revanche, $f_1 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ est continue en 0. Puisqu'ici, par définition de I, la limite de f en 0 impose de regarde $x \to 0^-$.

Ainsi si une fonction f n'est pas définie sur un intervalle (mais une réunion, par exemple), il faudrait préciser le lieu d'étude de la continuité. On pourrait écrire ici que f est continue en 0 selon l'intervalle $\mathbb{R}_-$.

Ordre des quantificateurs

Remarque Ordre et quantificateurs

Ordre des quantificateurs

Remarque Ordre et quantificateurs

Remarque Selon la nature de a et de ℓ

Ordre des quantificateurs

Remarque Ordre et quantificateurs

Remarque Selon la nature de a et de ℓ

$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$

$) = \ell$	$a = -\infty$	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$
∞	$\forall\ Y < 0, \exists\ X < 0 \mid x \leqslant X \Rightarrow f(x) \leqslant Y$	$\forall\ Y < 0, \exists\ \eta > 0 \mid \lvert x - a \rvert \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \leqslant Y$	$\forall\ Y < 0, \exists\ X > 0 \mid x \geqslant X \Rightarrow f(x) \leqslant Y$
	$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ X < 0 \mid x \leqslant X \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \epsilon$	$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \eta > 0 \mid \lvert x - a \rvert \leqslant \eta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \epsilon$	$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ X > 0 \mid x \geqslant X \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \epsilon$
∞	$\forall\ Y > 0, \exists\ X < 0 \mid x \leqslant X \Rightarrow f(x) \geqslant Y$	$\forall\ Y > 0, \exists\ \eta > 0 \mid \lvert x - a \rvert \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant Y$	$\forall\ Y > 0, \exists\ X > 0 \mid x \geqslant X \Rightarrow f(x) \geqslant Y$

Ordre des quantificateurs

Remarque Ordre et quantificateurs

Remarque Selon la nature de a et de ℓ

$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$

$) = \ell$	$a = -\infty$	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$
∞	$\forall\, Y < 0, \exists\, X < 0 \mid x \leqslant X \Rightarrow f(x) \leqslant Y$	$\forall\, Y < 0, \exists\, \eta > 0 \mid \lvert x - a\rvert \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \leqslant Y$	$\forall\, Y < 0, \exists\, X > 0 \mid x \geqslant X \Rightarrow f(x) \leqslant Y$
	$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, X < 0 \mid x \leqslant X \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \leqslant \epsilon$	$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \mid \lvert x - a\rvert \leqslant \eta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \leqslant \epsilon$	$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, X > 0 \mid x \geqslant X \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \leqslant \epsilon$
∞	$\forall\, Y > 0, \exists\, X < 0 \mid x \leqslant X \Rightarrow f(x) \geqslant Y$	$\forall\, Y > 0, \exists\, \eta > 0 \mid \lvert x - a\rvert \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant Y$	$\forall\, Y > 0, \exists\, X > 0 \mid x \geqslant X \Rightarrow f(x) \geqslant Y$

Remarque Inégalités larges ou strictes

Unicité

Théorème - Unicité

Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, celle-ci est unique.
Lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ ($(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$), cette proposition permet donc de parler de « la »limite de f en a et de noter $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

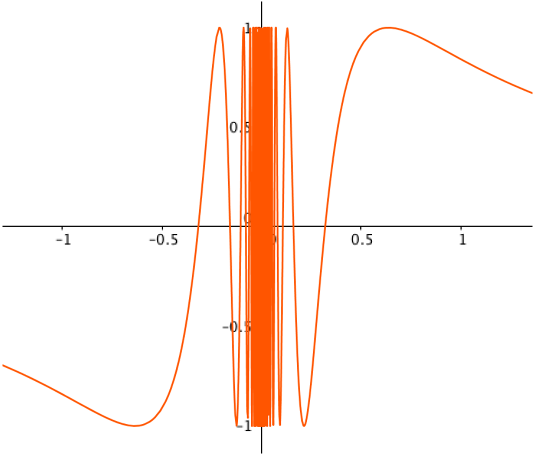
Unicité

Théorème - Unicité

Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, celle-ci est unique.
Lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ ($(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$), cette proposition permet donc de parler de « la »limite de f en a et de noter $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$.

Démonstration

Fonction sans limite



La fonction $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.
Sauriez-vous le prouver ?

Continuité

Proposition - Limite finie donc bornée

Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de a.

Continuité

Proposition - Limite finie donc bornée

Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de a.

Démonstration

Limite « sur le côté »

Proposition - Limite à gauche, à droite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On suppose que $a \in \mathbb{R}$ n'est pas la borne inférieure de I. On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite à gauche si la fonction $f_{|I \cap]-\infty, a[}$ admet ℓ pour limite en a, c'est-à-dire, dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, si
$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall x \in I, a - \eta \leqslant x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon.$$
On note $f(x) \underset{x \to a, x < a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$.
- On suppose que $a \in \mathbb{R}$ n'est pas la borne supérieure de I. On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite à droite si la fonction $f_{|I \cap]a, +\infty[}$ admet ℓ pour limite en a, c'est-à-dire, dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, si
$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall x \in I, a < x \leqslant a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon$$
On note $f(x) \underset{x \to a, x > a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$.

Caractérisations de limite -1

Proposition - Limite et limite à gauche et droite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si a n'est pas une extrémité de I, f admet ℓ pour limite en a si et seulement si f admet ℓ pour limite à gauche et à droite en a et si $f(a) = \ell$.

Caractérisations de limite -1

Proposition - Limite et limite à gauche et droite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si a n'est pas une extrémité de I, f admet ℓ pour limite en a si et seulement si f admet ℓ pour limite à gauche et à droite en a et si $f(a) = \ell$.

Si a est une extrémité de I, on a le même résultat en supprimant la limite à gauche ou la limite à droite.

Caractérisations de limite - 2

Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite a, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

Caractérisations de limite - 2

Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite a, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

Remarque Convergence de suites et voisinage

Caractérisations de limite - 2

Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite a, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

Remarque Convergence de suites et voisinage

Démonstration

Caractérisations de limite - 2

Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite a, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

Remarque Convergence de suites et voisinage

Démonstration

<u>Exercice</u>

Prouver que $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.
De même on prouverait que les fonctions $\sin$ ou $\cos$ n'ont pas de limite en $+\infty$.

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Inégalités

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient f, g deux fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que sur un voisinage V de a on a $f(x) \leqslant g(x)$ et que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Inégalités

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient f, g deux fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que sur un voisinage V de a on a $f(x) \leqslant g(x)$ et que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

Gendarmes

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit « des gendarmes »

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage V de a et $\ell \in \mathbb{R}$.
On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$ et que $\forall x \in V, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Alors le fonction g admet une limite en a et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

Gendarmes

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit « des gendarmes »

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage V de a et $\ell \in \mathbb{R}$.
On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$ et que $\forall x \in V, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Alors le fonction g admet une limite en a et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

Démonstration

Gendarmes

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Divergence vers $+\infty$ par minoration (resp. $-\infty$ par majoration)

Soient f et g deux fonctions définie sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $\forall x \in V, f(x) \leqslant g(x)$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \tag{1}$$

$$g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty \tag{2}$$

Gendarmes

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Divergence vers $+\infty$ par minoration (resp. $-\infty$ par majoration)

Soient f et g deux fonctions définie sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $\forall x \in V, f(x) \leqslant g(x)$. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \quad (1)$$

$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty \quad (2)$$

Démonstration

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Lemme

Lemme -

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et g bornée au voisinage de a,
alors $(f \times g) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

Lemme

Lemme -

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et g bornée au voisinage de a,
alors $(f \times g) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

Démonstration

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d’une fonction en un point ?

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

- En a ou en $+\infty$, vers ℓ ou vers $+\infty$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

- En a ou en $+\infty$, vers ℓ ou vers $+\infty$.
- $\forall\ A < 0, \exists\ \eta > 0$ tel que $\forall\ x \in I,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) < A\ (?)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

- En a ou en $+\infty$, vers ℓ ou vers $+\infty$.
- $\forall\ A < 0, \exists\ \eta > 0$ tel que $\forall\ x \in I,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) < A$ (?)
- Conséquence sur la caractère bornée de la fonction, ordre conservée sur les limites...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

- Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$

  (tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

- Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
  (tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)
- Par composition

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

- Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
  (tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)
- Par composition
- Théorème des gendarmes (ou encadrement)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

- Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
  (tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)
- Par composition
- Théorème des gendarmes (ou encadrement)
- Cas de la limite monotone.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 20 : Continuité
  3. Fonction continue sur un ensemble
- Exercices pour mardi : n° 390 & 391
- TD jeudi : 8h-10h : 394, 396, 399, 403, 406
  10h-12h : 395, 398, 400, 405, 407