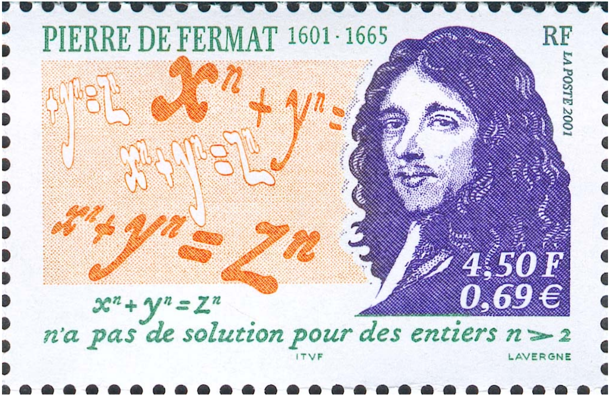

Leçon 54 - Continuité

21 janvier 2025

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
- 2.1. Définitions
- 2.2. Ordre et limites
- 2.3. Opérations sur les limites
- 2.4. Cas des fonctions monotones
- 2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
- 3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
   - 2.1. Définitions
   - 2.2. Ordre et limites
   - 2.3. Opérations sur les limites
   - 2.4. Cas des fonctions monotones
   - 2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
   - 3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
   2.1. Définitions
   2.2. Ordre et limites
   2.3. Opérations sur les limites
   2.4. Cas des fonctions monotones
   2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
   3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Limite

Définition - Limite

Soient f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité (éventuellement infinie) de I.

On dit que f tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers a si

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

ou de manière équivalente :

$$\forall\ W \in \mathcal{V}_\ell,\ f^{-1}(W) := \{x \mid f(x) \in W\} \in \mathcal{V}_a\ .$$

On note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
 2.1. Définitions
 2.2. Ordre et limites
 2.3. Opérations sur les limites
 2.4. Cas des fonctions monotones
 2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
 3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Lemme

Lemme -

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et g bornée au voisinage de a,

alors $(f \times g) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Arithmétique

Théorème - Opération sur les limites

Si f et g ont des limites respectives $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- $|f|$ a une limite en a qui est $|\ell|$;
- lorsque $\lambda\ell$ n'est pas une forme indéterminée, λf a une limite qui est $\lambda\ell$;
- lorsque $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée, $f + g$ a une limite qui est $\ell + \ell'$;
- lorsque $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée, fg a une limite qui est $\ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas et la restriction de $\frac{1}{g}$ à ce voisinage a une limite en a qui est $\frac{1}{\ell'}$

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Arithmétique

Théorème - Opération sur les limites

Si f et g ont des limites respectives $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- $|f|$ a une limite en a qui est $|\ell|$;
- lorsque $\lambda\ell$ n'est pas une forme indéterminée, λf a une limite qui est $\lambda\ell$;
- lorsque $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée, $f + g$ a une limite qui est $\ell + \ell'$;
- lorsque $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée, fg a une limite qui est $\ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas et la restriction de $\frac{1}{g}$ à ce voisinage a une limite en a qui est $\frac{1}{\ell'}$

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Composition

Exercice

Montrer que si $g \to 0$, alors $\left|\frac{1}{g}\right| \to +\infty$ (au même point $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Composition

<u>Exercice</u>

Montrer que si $g \to 0$, alors $\left|\frac{1}{g}\right| \to +\infty$ (au même point $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

Théorème - Composition des limites

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $a \in \overline{I}$ (élément ou extrémité de I). On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et que $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$. Alors

$$g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Composition

<u>Exercice</u>

Montrer que si $g \to 0$, alors $\left|\frac{1}{g}\right| \to +\infty$ (au même point $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

Théorème - Composition des limites

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $a \in \overline{I}$ (élément ou extrémité de I). On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et que $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$. Alors

$$g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Composition

Exercice

Montrer que si $g \to 0$, alors $\left|\frac{1}{g}\right| \to +\infty$ (au même point $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

Théorème - Composition des limites

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $a \in \overline{I}$ (élément ou extrémité de I). On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et que $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} \ell$. Alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Démonstration

On voit ici l'idée principale de la définition des limites de fonctions : penser en application réciproque (de l'arrivée vers le départ).

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Limite monotone

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- si f est croissante majorée, alors f admet une limite finie en b égale à $\sup\{f(x), x \in]a, b[\}$;
- si f est croissante non majorée, alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$;
- si f est croissante minorée, alors f admet une limite finie en a égale à $\inf\{f(x), x \in]a, b[\}$;
- si f est croissante non minorée, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$;

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur
⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Limite monotone

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- si f est décroissante minorée, alors f admet une limite finie en b égale à $\inf\{f(x), x \in]a,b[\}$;
- si f est décroissante non minorée, alors $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} -\infty$;
- si f est décroissante majorée, alors f admet une limite finie en a égale à $\sup\{f(x), x \in]a,b[\}$;
- si f est décroissante non majorée, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Limite monotone

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- si f est décroissante minorée, alors f admet une limite finie en b égale à $\inf\{f(x), x \in]a,b[\}$;
- si f est décroissante non minorée, alors $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} -\infty$;
- si f est décroissante majorée, alors f admet une limite finie en a égale à $\sup\{f(x), x \in]a,b[\}$;
- si f est décroissante non majorée, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration

Limite monotone

Théorème - Limite monotone en touts points

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de I qui n'est pas une extrémité de I. Si f est croissante on a

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x).$$

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur
⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle
1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Limite monotone

Théorème - Limite monotone en touts points

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de I qui n'est pas une extrémité de I. Si f est croissante on a

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Limite monotone

Théorème - Limite monotone en touts points

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de I qui n'est pas une extrémité de I. Si f est croissante on a

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Démonstration

Exercice

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ croissante. On suppose de plus que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Montrer que f admet une limite en tout point.

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur
⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle
1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
   2.1. Définitions
   2.2. Ordre et limites
   2.3. Opérations sur les limites
   2.4. Cas des fonctions monotones
   2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
   3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Définition

Définition - Continuité

Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ ce qui peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Définition

Définition - Continuité

Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ ce qui peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque Lien avec les limites

1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Définition

Définition - Continuité

Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ ce qui peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque Lien avec les limites
Remarque Continuité à gauche, à droite

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur
⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle
1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Discontinuité de deux types

Définition - Discontinuité de deux types

On dit qu'une fonction f définie sur l'intervalle I possède en un point a de l'intérieur de I une discontinuité de première espèce ou une discontinuité simple si f est discontinue en ce point mais que $\lim_{a^+} f$ et $\lim_{a^-} f$ existent.
Tous les autres points de discontinuité sont dits de seconde espèce.

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Discontinuité de deux types

Définition - Discontinuité de deux types

On dit qu'une fonction f définie sur l'intervalle I possède en un point a de l'intérieur de I une discontinuité de première espèce ou une discontinuité simple si f est discontinue en ce point mais que $\lim_{a^+} f$ et $\lim_{a^-} f$ existent.
Tous les autres points de discontinuité sont dits de seconde espèce.

Exercice

Donner un exemple de chacune de ces deux discontinuités.

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur
⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle
1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Lien avec les suites

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Lien avec les suites

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Lien avec les suites

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration

Corollaire - Limite de suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction continue et (u_n) une suite définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur
⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle
1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Lien avec les suites

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration

Corollaire - Limite de suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction continue et (u_n) une suite définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Démonstration

Savoir-faire. Démontrer la non-continuité d'une fonction

Le théorème précédent fournit un moyen de prouver qu'une fonction n'a pas de limite en a.

1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Continuité sur un intervalle

Avec des jauges qui permettent de faire une interversion de quantificateurs :

Définition - Continuité

Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

$$\forall\ x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\epsilon : I \to \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \delta_\epsilon(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

On note $C(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
Ou $C(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ s'il y a un risque de confusion sur l'ensemble d'arrivée de I.

1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Fonctions non continues ?

Attention. Fonctions usuelles, continues ?

La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, mais il existe des fonctions qui ne sont pas continues partout, par exemple la fonction partie entière ou la fonction indicatrice de $\{0\}$.
Il existe même des fonctions nulle part continues, comme le montre l'exercice suivant

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Fonctions non continues ?

Attention. Fonctions usuelles, continues ?

La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, mais il existe des fonctions qui ne sont pas continues partout, par exemple la fonction partie entière ou la fonction indicatrice de $\{0\}$.
Il existe même des fonctions nulle part continues, comme le montre l'exercice suivant

Exercice

Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, $1_{\mathbb{Q}}$, n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Application

Une application : résoudre des équations fonctionnelles

Exercice

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$. Montrer que f est impaire.
2. Déterminer la restriction de f à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer finalement f.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Application

Une application : résoudre des équations fonctionnelles

Exercice

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$. Montrer que f est impaire.
2. Déterminer la restriction de f à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer finalement f.

Savoir-faire. Définir f (continue) de X à $\overline{X}$

Si f est définie sur un ensemble X, la continuité de f peut permettre d'étendre f sur $\overline{X}$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Opération sur la continuité

Proposition - Opération de continuité

Si f et g sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues en $x_0 \in I$, alors $|f|$, $f+g$, fg sont continues en x_0, ainsi que $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
- 2.1. Définitions
- 2.2. Ordre et limites
- 2.3. Opérations sur les limites
- 2.4. Cas des fonctions monotones
- 2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
- 3.1. Fonctions continues sur I

Opération sur la continuité

Proposition - Opération de continuité

Si f et g sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues en $x_0 \in I$, alors $|f|$, $f+g$, fg sont continues en x_0, ainsi que $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Opération sur la continuité

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Proposition - Opération de continuité

Si f et g sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues en $x_0 \in I$, alors $|f|$, $f+g$, fg sont continues en x_0, ainsi que $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$.

Démonstration

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions f^+ et f^- par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Montrer que si f est continue en x_0, alors f^+ et f^- sont continues en x_0.

Opération sur la continuité

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Proposition - Continuité d'une composée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Opération sur la continuité

Proposition - Continuité d'une composée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Démonstration

Conclusion

Objectifs

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opération sur les limites : existence & valeur

- Théorème des gendarmes (ou encadrement)

$\Rightarrow$ Opération sur les limites : existence & valeur

$\Rightarrow$ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opération sur les limites : existence & valeur

- Théorème des gendarmes (ou encadrement)
- Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
  (tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

- Théorème des gendarmes (ou encadrement)
- Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
  (tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)
- Par composition

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur
⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle
1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opération sur les limites : existence & valeur

- Théorème des gendarmes (ou encadrement)
- Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
  (tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)
- Par composition
- Cas de la limite monotone.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

- Cas particulier de limite (finie) en un point fini de $\mathbb{R}$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opération sur les limites : existence & valeur

$\Rightarrow$ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

- Cas particulier de limite (finie) en un point fini de $\mathbb{R}$.
- Deux types de discontinuité

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opération sur les limites : existence & valeur

$\Rightarrow$ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

- Cas particulier de limite (finie) en un point fini de $\mathbb{R}$.
- Deux types de discontinuité
- Continuité sur un intervalle : rôle des quantificateurs et jauge

$\Rightarrow$ Opération sur les limites : existence & valeur
$\Rightarrow$ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle
1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

- Cas particulier de limite (finie) en un point fini de $\mathbb{R}$.
- Deux types de discontinuité
- Continuité sur un intervalle : rôle des quantificateurs et jauge
- « Héritage » des résultats sur les limites en un point (composition, opération algébrique...).

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur
⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle
1. Problèmes
2. Limites (de fonctions)
2.1. Définitions
2.2. Ordre et limites
2.3. Opérations sur les limites
2.4. Cas des fonctions monotones
2.5. Continuité en un point
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)
3.1. Fonctions continues sur I

Conclusion

Objectifs

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 20 : Continuité
  3. Fonction continue sur un ensemble
- Exercices pour mercredi : n°389 & 392
- TD jeudi : 8h-10h : 394, 396, 399, 403, 406
  10h-12h : 395, 398, 400, 405, 407

⇒ Opération sur les limites : existence & valeur

⇒ Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.4. Cas des fonctions monotones

2.5. Continuité en un point

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I