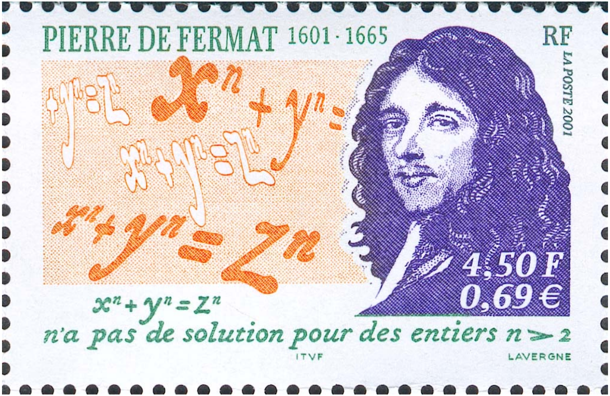

Leçon 57 - Dérivabilité (approfondissements)

24 janvier 2025

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Problèmes

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problèmes

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problème - Dérivation d'ordre n

Problèmes

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problème - Dérivation d'ordre n

Problème - Dérivation en un point

Problèmes

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problème - Dérivation d'ordre n

Problème - Dérivation en un point

Problème - Théorème de la mouche

Problèmes

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problème - Dérivation d'ordre n

Problème - Dérivation en un point

Problème - Théorème de la mouche

Problème - Fonctions complexes

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Fonction dérivable en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si l'application (taux d'accroissement de f en a)

$$\tau_a f : \begin{array}{ll} I \setminus \{a\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet une limite finie en a.

Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$ (ou $Df(a)$, ou $\frac{df}{dx}(a)$) :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Définition

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Fonction dérivable en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Si $\tau_a f$ admet une limite finie à droite en a (a n'étant pas l'extrémité droite de I), on dit que f est dérivable à droite en a :

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si $\tau_a f$ admet une limite finie à gauche en a (a n'étant pas l'extrémité gauche de I), on dit que f est dérivable à gauche en a :

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Critère

De la définition, on peut affirmer :

Proposition - Dérivée à gauche et à droite

Si a n'est pas une extrémité de I, f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Critère

De la définition, on peut affirmer :

Proposition - Dérivée à gauche et à droite

Si a n'est pas une extrémité de I, f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

On a la définition équivalente, démontrée au chapitre 5

Proposition - Définition de Weierstrass

On rappelle que f est dérivable en a si et seulement si
il existe $A \in \mathbb{R}, \epsilon : I \to \mathbb{R}$, continue et nul en a tels que $f(x) = f(a) + (x-a)(A+\epsilon(x))$.
Dans ce cas $f'(a) = A$.

Passage à la fonction

Définition - Fonction dérivable

$f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Passage à la fonction

Définition - Fonction dérivable

$f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Théorème - Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en $a \in I$, alors f est continue (resp. continue à droite, resp. continue à gauche) en a.

Passage à la fonction

Définition - Fonction dérivable

$f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Théorème - Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en $a \in I$, alors f est continue (resp. continue à droite, resp. continue à gauche) en a.

Démonstration

Remarques

Remarque Réciproque fausse

Remarques

Remarque Réciproque fausse

Remarque Approximation affine de f en a

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Propositions (déjà vues)

On démontre des résultats énoncés au chapitre 5.

Propositions (déjà vues)

On démontre des résultats énoncés au chapitre 5.

Proposition - Dérivation d'un produit

Soient f et g deux fonctions dérivables en a, λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Propositions (déjà vues)

Proposition - Dérivation d'un produit

Soient f et g deux fonctions dérivables en a, λ et μ deux réels.
Alors $\lambda f+\mu g$ et fg sont dérivables en a et

$$(\lambda f+\mu g)'(a)=\lambda f'(a)+\mu g'(a),$$
$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

Démonstration

Propositions (déjà vues)

Proposition - Dérivation d'un produit

Soient f et g deux fonctions dérivables en a, λ et μ deux réels.
Alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Démonstration

Théorème - Démonstration de composition de fonctions

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\phi : I \to \mathbb{R}$ tq que $\phi(I) \subset J$, $f : J \to \mathbb{R}$, $a \in I$.
Si ϕ est dérivable en a et f dérivable en $\phi(a)$
alors $f \circ \phi$ est dérivable en a et $(f \circ \phi)'(a) = \phi'(a) f'(\phi(a))$.
Si ϕ est dérivable sur I, f dérivable sur J, alors $f \circ \phi$ est dérivable sur I et $(f \circ \phi)' = \phi' \times f' \circ \phi$.

Démonstration

Propositions (déjà vues)

Théorème - Dérivée de l'inverse d'une fonction

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$ et f dérivable en a. Alors il existe un intervalle J de $\mathbb{R}$, voisinage de a dans I, tel que f ne s'annule pas sur J et $\frac{1}{f}$ (qui est donc définie sur J) est dérivable en a,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

Propositions (déjà vues)

Théorème - Dérivée de l'inverse d'une fonction

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$ et f dérivable en a. Alors il existe un intervalle J de $\mathbb{R}$, voisinage de a dans I, tel que f ne s'annule pas sur J et $\dfrac{1}{f}$ (qui est donc définie sur J) est dérivable en a,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

Démonstration

Autre démonstration

Exercice

Démonstration avec le critère de Weierstrass.

1. Ecrire le développement de $\frac{1}{f(x)}$ en exploitant la dérivée de f en a.
2. Montrer que si $\varphi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, alors il existe ψ tel que $\psi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{1+(x-a)(A+\varphi(x))} = 1-(x-a)(A+\psi(x))$
3. En factorisant par $\frac{1}{f(a)}$, montrer que f est dérivable en a et retrouver la valeur de $f'(a)$.

Propositions (déjà vues)

Théorème - Dérivation de la fonction réciproque en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I, dérivable en $a \in I$. On sait que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Propositions (déjà vues)

Théorème - Dérivation de la fonction réciproque en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I, dérivable en $a \in I$. On sait que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Corollaire - Fonction réciproque

Soit f dérivable, strictement monotone sur I telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Propositions (déjà vues)

Théorème - Dérivation de la fonction réciproque en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I, dérivable en $a \in I$. On sait que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Corollaire - Fonction réciproque

Soit f dérivable, strictement monotone sur I telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et
$(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivation successive en un point

Définition - Dérivées successives en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit par récurrence

- $f^{(0)} = f$
- pour $n \geqslant 1$, on dit que f est n fois dérivable en $a \in I$ s'il existe un intervalle $J \subset I$, J voisinage dans I de a, tel que f soit $n-1$ fois dérivable sur J et tel que $f^{(n-1)} : J \to \mathbb{R}$ soit dérivable en a.

On pose alors $\left(f^{(n-1)}\right)'(a) = f^{(n)}(a)$ ou aussi $D^n f(a) = \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$.

Dérivation successive en un point

Définition - Dérivées successives en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit par récurrence

- $f^{(0)} = f$
- pour $n \geqslant 1$, on dit que f est n fois dérivable en $a \in I$ s'il existe un intervalle $J \subset I$, J voisinage dans I de a, tel que f soit $n-1$ fois dérivable sur J et tel que $f^{(n-1)} : J \to \mathbb{R}$ soit dérivable en a.

On pose alors $\left(f^{(n-1)}\right)'(a) = f^{(n)}(a)$ ou aussi $D^n f(a) = \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$.

Attention. Voisinage de a

Notons que pour définir $f'(a)$, on a besoin d'un intervalle contenant a (voisinage) pour f.
De même pour définir $f^{(n)}(a)$, il faut un voisinage de a pour définir $f^{(n-1)}$ donc f dérivable $n-1$ fois sur plus que a.
On ne définit donc la n-dérivabilité en un point, mais sur un voisinage.

Dérivation successive sur un intervalle

Définition - Dérivées successives d'une fonction

On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I.
L'application

$$\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{(n)}(x) \end{cases}$$

est alors appelée dérivée n-ième de f et notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$.

Dérivation successive sur un intervalle

Définition - Dérivées successives d'une fonction

On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I.
L'application

$$\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{(n)}(x) \end{cases}$$

est alors appelée dérivée n-ième de f et notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$.

<u>Exercice</u>

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}$.

Formule de Leibniz

Théorème - Théorème de Leibniz

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors fg est n fois dérivable en a et on a la formule :

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k)}(a).$$

Formule de Leibniz

Théorème - Théorème de Leibniz

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors fg est n fois dérivable en a et on a la formule :

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k)}(a).$$

Exercice

Soit $h : x \mapsto (x^2 + x + 1)\sin 2x$. Calculer $h^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Formule de Leibniz

Théorème - Théorème de Leibniz

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors fg est n fois dérivable en a et on a la formule :

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k)}(a).$$

Exercice

Soit $h : x \mapsto (x^2 + x + 1)\sin 2x$. Calculer $h^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Corollaires

Corollaire - Composition n fois dérivable

Soient $\phi : I \to \mathbb{R}, f : J \to \mathbb{R}$ telles que $\phi(I) \subset J$, $a \in I, n \in \mathbb{N}^*$.
Si ϕ est n fois dérivable en a et f n fois dérivable en $\phi(a)$,
alors $f \circ \phi$ est n fois dérivable en a.

Corollaires

Corollaire - Composition n fois dérivable

Soient $\phi : I \to \mathbb{R}, f : J \to \mathbb{R}$ telles que $\phi(I) \subset J$, $a \in I, n \in \mathbb{N}^*$.
Si ϕ est n fois dérivable en a et f n fois dérivable en $\phi(a)$,
alors $f \circ \phi$ est n fois dérivable en a.

Corollaire - Inverse n fois dérivable

Soient $f : I \to \mathbb{R}, a \in I$ tels que $f(a) \neq 0$ et f, n fois dérivable en a ($n \geqslant 1$).
Alors $\dfrac{1}{f}$ (définie sur un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas) est n fois dérivable en a.

Corollaires

Corollaire - Composition n fois dérivable

Soient $\phi : I \to \mathbb{R}, f : J \to \mathbb{R}$ telles que $\phi(I) \subset J$, $a \in I, n \in \mathbb{N}^*$.
Si ϕ est n fois dérivable en a et f n fois dérivable en $\phi(a)$,
alors $f \circ \phi$ est n fois dérivable en a.

Corollaire - Inverse n fois dérivable

Soient $f : I \to \mathbb{R}, a \in I$ tels que $f(a) \neq 0$ et f, n fois dérivable en a $(n \geqslant 1)$.
Alors $\dfrac{1}{f}$ (définie sur un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas) est n fois dérivable en a.

Démonstrations

Dérivation successive de la fonction réciproque

Proposition - Réciproque n fois dérivable

Soit f continue, strictement monotone sur I. Soit $n \geqslant 1$. Si f est n fois dérivable sur I et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est n fois dérivable sur $f(I)$.

Dérivation successive de la fonction réciproque

Proposition - Réciproque n fois dérivable

Soit f continue, strictement monotone sur I. Soit $n \geqslant 1$. Si f est n fois dérivable sur I et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est n fois dérivable sur $f(I)$.

Démonstration

Fonction de classe $\mathscr{C}^n$

Définition - Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ (ou que f est n fois continûment dérivable) si

(i) f est n fois dérivable sur I
(ii) $f^{(n)}$ est continue sur I.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n. On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$) l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de I dans $\mathbb{R}$.

Fonction de classe $\mathscr{C}^n$

Définition - Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ (ou que f est n fois continûment dérivable) si

(i) f est n fois dérivable sur I

(ii) $f^{(n)}$ est continue sur I.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n. On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$) l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque Inclusion d'ensembles

Stabilité opératoire

Proposition - Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Combinaison linéaire, produit, inverse, composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, fonction réciproque de f de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f' ne s'annule pas sont de classe $\mathscr{C}^n$.

Fonctions usuelles

Proposition - Fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, les fonctions $\exp, \ln, \cos, \sin, \tan, \arctan, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions $\arcsin, \arccos$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

Fonctions usuelles

Proposition - Fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, les fonctions $\exp, \ln, \cos, \sin, \tan, \arctan, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions $\arcsin, \arccos$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

<u>Exercice</u>

Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+\sin^2 x)y'' + y' + e^{-5x} y = \mathrm{ch} x$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

- Définition de la dérivée en un point (par une limite) puis sur un intervalle.

Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

- Définition de la dérivée en un point (par une limite) puis sur un intervalle.
- Il existe des algorithmes de calculs d'opération de fonctions

Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

- Définition de la dérivée en un point (par une limite) puis sur un intervalle.
- Il existe des algorithmes de calculs d'opération de fonctions
- Les fonctions usuelles sont dérivables avec des formules à connaitre (tableau !).
  Non vu dans ce chapitre. . .

Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

- Définition des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$. Etude de la fonction réciproque en particulier.

Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

- Définition des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$. Etude de la fonction réciproque en particulier.
- Théorème de Leibniz : $(f \times g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 13 : Dérivabilité
  3. Etude globale des fonctions dérivables
- Exercice n°413 & 414
- TD de jeudi :
  8h-10h : 415, 420, 423, 418, 425
  10h-12h : 416, 411, 422, 412, 426