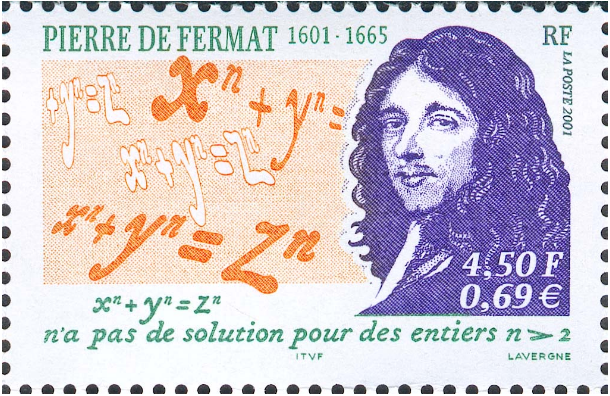

Leçon 58 - Dérivabilité (approfondissements)

28 janvier 2025

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

Annulation de la dérivée

Proposition - Annulation de la dérivée

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $c \in I$, c n'étant pas une extrémité de I.
On suppose que f est dérivable en c et admet un maximum local en c.
Alors $f'(c) = 0$.

Annulation de la dérivée

Proposition - Annulation de la dérivée

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $c \in I$, c n'étant pas une extrémité de I.
On suppose que f est dérivable en c et admet un maximum local en c.
Alors $f'(c) = 0$.

Remarque Généralisation et vocabulaire

- Un point c tel que $f'(c) = 0$ s'appelle un point critique
- on a le même résultat pour un minimum local

Attention !

Attention. Il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante

$f'(c) = 0$ n'est pas une condition suffisante.
Le contre-exemple classique suivant le montre : $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ en 0.

Attention !

Attention. Il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante

$f'(c) = 0$ n'est pas une condition suffisante.
Le contre-exemple classique suivant le montre : $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ en 0.

Attention. La condition d'intérieur

La proposition est fausse pour c en une extrémité de I.. Le contre-exemple classique suivant le montre : $x \mapsto x+1$ sur $[-1,1]$

Attention !

Attention. Il s’agit d’une condition nécessaire, mais pas suffisante

$f'(c) = 0$ n’est pas une condition suffisante.
Le contre-exemple classique suivant le montre : $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ en 0.

Attention. La condition d’intérieur

La proposition est fausse pour c en une extrémité de I.. Le contre-exemple classique suivant le montre : $x \mapsto x+1$ sur $[-1,1]$

Démonstration

Théorème de Rolle

Théorème -Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

Théorème -Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

Théorème de Rolle généralisé

La même démonstration s'adapte tout à fait, au cas où $b = \infty$, mais dans ce cas, il faut prendre un B tel que $\forall\ x > B$, $|f(x) - f(a)| < |f(d) - f(a)|$:

Théorème de Rolle généralisé

La même démonstration s'adapte tout à fait, au cas où $b = \infty$, mais dans ce cas, il faut prendre un B tel que $\forall\ x > B$, $|f(x) - f(a)| < |f(d) - f(a)|$:

Proposition - Généralisation du théorème de Rolle

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle généralisé

La même démonstration s'adapte tout à fait, au cas où $b=\infty$, mais dans ce cas, il faut prendre un B tel que $\forall\ x>B$, $|f(x)-f(a)|<|f(d)-f(a)|$:

Proposition - Généralisation du théorème de Rolle

Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$, continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(a)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Alors il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice

Faire la démonstration

Applications

Savoir-faire. Les racines imbriquées

Bien souvent on applique le théorème de Rolle avec f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, $f(a) = f(b) = 0$, on obtient alors la version suivante : *Entre deux zéros de f il y a un zéro de f'.*

Applications

Savoir-faire. Les racines imbriquées

Bien souvent on applique le théorème de Rolle avec f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, $f(a)=f(b)=0$, on obtient alors la version suivante : *Entre deux zéros de f il y a un zéro de f'.*

<u>Exercice</u>

Montrer la formule de Taylor-Lagrange :

Si $f \in \mathscr{C}^n([a,b])$ et $n+1$ fois dérivable, il existe $c \in]a,b[$ telle que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Savoir-faire (Lagrange)

Savoir-faire. Quelle fonction φ choisir pour appliquer le théorème de Rolle ?

De manière générale, on prend $\varphi = f - P$ où P est un polynôme bien choisi.
Mais il y a deux types de questions :

- Ou bien c est associé à une série de dérivées de f en un même point.
  C'est le cas ici ($f^{(k)}(a)$) avec la formule de Taylor.
- Ou bien c est associé à une série de valeurs de f (interpolation).
  On considère alors ici $P(t) = \sum_{k=0}^{d} f(x_k) \prod_{i \neq k} \frac{t - x_i}{x_k - x_i}$.

On annule et on dérive (plusieurs fois - si nécessaire) avec le théorème de Rolle

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

Enoncé

Théorème - Théorème (ou formule, ou égalité) des accroissements finis (A.F.)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Enoncé

Théorème - Théorème (ou formule, ou égalité) des accroissements finis (A.F.)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Remarque Graphiquement

Enoncé

Théorème - Théorème (ou formule, ou égalité) des accroissements finis (A.F.)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Remarque Graphiquement

Démonstration

Application aux variations d'une fonction

Théorème - CNS de Variations de f

I désigne un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ (I privé de ses éventuelles bornes). Alors

- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$,
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geqslant 0$,
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leqslant 0$.

Application aux variations d'une fonction

Théorème - CNS de Variations de f

I désigne un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ (I privé de ses éventuelles bornes). Alors

- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = 0$,
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geqslant 0$,
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \leqslant 0$.

Démonstration

Application aux variations strictes d'une fonction

Dans le cas de la seconde implication, avec que des inégalités strictes :

Proposition - Stricte monotonie (C.S)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors

$$\forall x \in \overset{\circ}{I},\, f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur } I.$$

Application aux variations strictes d'une fonction

Dans le cas de la seconde implication, avec que des inégalités strictes :

Proposition - Stricte monotonie (C.S)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors

$$\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur } I.$$

Attention - La réciproque est fausse

$f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $]-1,1[$.
Et pourtant $f'(0) = 0$, avec $0 \in]-1,1[$

Application aux variations strictes d'une fonction

Dans le cas de la seconde implication, avec que des inégalités strictes :

Proposition - Stricte monotonie (C.S)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur } I.$$

Attention - La réciproque est fausse

$f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $]-1, 1[$.
Et pourtant $f'(0) = 0$, avec $0 \in]-1, 1[$

<u>Exercice</u>
En appliquant le théorème énoncé dans la marge, montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et si f' est de signe constant et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone sur I.

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Etude globale des fonctions dérivables

   3.1. Théorème de Rolle

   3.2. Egalité des accroissements finis

   3.3. Inégalité des accroissements finis

IAF

Théorème - Inégalités des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Si $\forall x \in]a,b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

IAF

Théorème - Inégalités des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Si $\forall x \in]a,b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Corollaire - f bornée et fonction lipschitzienne

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I. S'il existe $K \geqslant 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant K$ alors f est **K-lipschitzienne sur I** c'est-à-dire que

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|.$$

Remarques

Remarque Réciproque du corollaire

Remarques

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f, alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.
Le contrôle réciproque ne marche pas.
On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

Remarques

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f, alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.
Le contrôle réciproque ne marche pas.
On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

Exercice
Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque

Remarques

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f, alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.
Le contrôle réciproque ne marche pas.
On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

<u>Exercice</u>
Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque
Démonstration

Remarques

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f, alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.
Le contrôle réciproque ne marche pas.
On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

Exercice
Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque
Démonstration
Remarque Interprétation autoroutière

Remarques

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f, alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.
Le contrôle réciproque ne marche pas.
On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

Exercice
Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque
Démonstration
Remarque Interprétation autoroutière
Exercice
Une fonction à dérivée bornée est uniformément continue

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Savoir-faire. Application à l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Cette méthode s'applique à toute suite (u_n) définie par $u_0 \in I, u_{n+1} = f(u_n)$ telle que

- I est un intervalle fermé stable par f
- f est dérivable et il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant k$
- il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$

Dans ce cas, pour tout $n > 0$,

$$|u_n - \ell| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$$

(par récurrence géométrique). Et donc, par le théorème d'encadrement : $(u_n) \to \ell$

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

<u>Exercice</u>

On considère la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Donner une majoration de $|u_{n+1} - 2|$ en fonction de $|u_n - 2|$ puis une majoration de $|u_n - 2|$ en fonction de $|u_0 - 2|$ et n. En déduire que (u_n) est convergente.

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice

On considère la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Donner une majoration de $|u_{n+1} - 2|$ en fonction de $|u_n - 2|$ puis une majoration de $|u_n - 2|$ en fonction de $|u_0 - 2|$ et n. En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice

Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2}\sin u_n$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

- Théorème de Rolle : si $f(a) = f(b)$, $\exists\ c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

- Théorème de Rolle : si $f(a) = f(b)$, $\exists\ c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Egalité des accroissements finis : $\exists\ c \in]a, b[$ tel que $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

- En particulier : application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

- En particulier : application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Si $f'(x)$ admet une limite en a, alors la régularité se prolonge pour f en a.
  Prolongement du caractère dérivable de f.

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

- En particulier : application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Si $f'(x)$ admet une limite en a, alors la régularité se prolonge pour f en a.
  Prolongement du caractère dérivable de f.
- Règle de L'Hospital

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 13 : Dérivabilité
  4. Fonctions à valeurs complexes
- Exercice n° 417 & 419
- TD de jeudi :
  8h-10h : 415, 420, 423, 418, 425
  10h-12h : 416, 411, 422, 412, 426