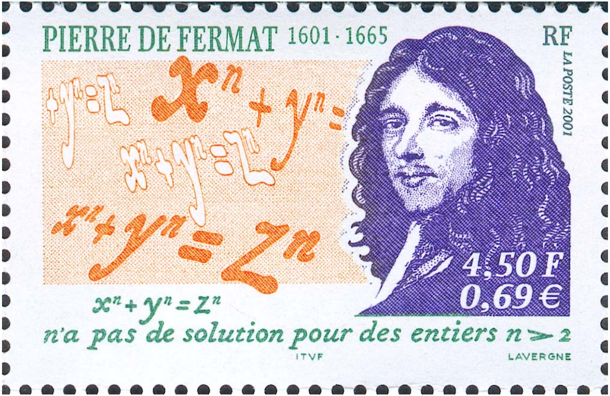

Leçon 59 - Dérivabilité (approfondissements)

29 janvier 2025

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

Limite de la dérivée

Théorème - Limite de la dérivée

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$.
On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a.
Alors $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$, c'est-à-dire que f est dérivable en a et f' est continue en a $(f'(a)=\ell)$.

Limite de la dérivée

Théorème - Limite de la dérivée

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$.
On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a.
Alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$, c'est-à-dire que f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Corollaire - Limite de la dérivée (au coeur de l'intervalle)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, dérivable sur les deux intervalles constituant $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Limite de la dérivée

Théorème - Limite de la dérivée

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$.
On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a.
Alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$, c'est-à-dire que f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Corollaire - Limite de la dérivée (au coeur de l'intervalle)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, dérivable sur les deux intervalles constituant $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Démonstration

Cas infini

Proposition - Limite de la dérivée infinie

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$. On suppose que $\lim_{x\to a} f'(x) = +\infty$ (resp $-\infty$).

Alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ (resp. $-\infty$), c'est-à-dire que f n'est pas dérivable en a mais que $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en a.

Cas infini

Proposition - Limite de la dérivée infinie

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$. On suppose que $\lim_{x\to a} f'(x) = +\infty$ (resp $-\infty$).

Alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ (resp. $-\infty$), c'est-à-dire que f n'est pas dérivable en a mais que $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en a.

Démonstration

Avec continuité de f'

Théorème - Théorème de classe $\mathscr{C}^1$ par prolongement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Avec continuité de f'

Théorème - Théorème de classe $\mathscr{C}^1$ par prolongement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Remarque Force du théorème

Avec continuité de f'

Théorème - Théorème de classe $\mathscr{C}^1$ par prolongement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Remarque Force du théorème

Exemple Applications

Avec continuité de f'

Théorème - Théorème de classe $\mathscr{C}^1$ par prolongement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Remarque Force du théorème

Exemple Applications

On généralise par récurrence aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Théorème - Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement

Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ $f^{(i)}$ admet une limite finie ℓ_i en a. Alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ $f^{(i)}(a) = \ell_i$.

Exercices

Exemple - Fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercices

Exemple - Fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice

Soit

$$f : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. f' a-t-elle une limite en 0 ?
3. f est-elle dérivable sur $[0,1]$? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$?
4. Que peut-on en conclure pour les théorèmes précédents ?

Savoir-faire

Exploiter le théorème de la limite de la dérivée

Ici, il est surtout important de montrer au correcteur que l'on écrit pas n'importe quoi.

- Par exemple, ce n'est pas la dérivée qui est prolongée.
- Savoir si une fonction est dérivable en un point, ne consiste pas a priori, à savoir si la dérivée admet une limite en ce point.

Cette dernière observation ($\lim_{x_0} f'$) s'étudie comme conséquence d'un super théorème !
Pour être assuré que le correcteur a bien compris qu'on exploite ce théorème, on rappelle avec insistance les hypothèses à vérifier pour appliquer le théorème (continuité de $f\ldots$).
Si on doit le démontrer pour les dérivées de tous les ordres, on fait une récurrence, avec un contrôle pour s'assurer le passage à la limite.

Savoir-faire

Exercice

Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$. Montrer que f se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

Extension de la règle de l'Hospital

Analyse Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

Extension de la règle de l'Hospital

Analyse Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

Proposition - Prolongement de la règle de l'Hospital

Soit $a \in I$, f et g dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite en a et $g' \neq 0$ sur un voisinage épointé de a.
Alors $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ admet une limite en a égale à $\lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$.

Extension de la règle de l'Hospital

Analyse Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

Proposition - Prolongement de la règle de l'Hospital

Soit $a \in I$, f et g dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite en a et $g' \neq 0$ sur un voisinage épointé de a.
Alors $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ admet une limite en a égale à $\lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$.

Démonstration

Extension de la règle de l'Hospital

Analyse Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

Proposition - Prolongement de la règle de l'Hospital

Soit $a \in I$, f et g dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite en a et $g' \neq 0$ sur un voisinage épointé de a.
Alors $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ admet une limite en a égale à $\lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$.

Démonstration
Un petit d'exercice d'application qui donne un savoir-faire et reprend un résultat classique.

Exercice

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4}$

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

1. Problèmes
2. Dérivée
3. Etude globale des fonctions dérivables
3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée
3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital
4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes
4.1. Définitions
4.2. Opérations

Définition (équivalence)

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition - Taux de variations ou parties réelle et imaginaire

Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$, $a \in I$. On définit la fonction τ_a sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- τ_a possède une limite en a (limite dans $\mathbb{C}$).
- $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ (fonctions à valeurs réelles) sont dérivables en a.

On dit alors que f est dérivable en a. On note $f'(a) = Df(a) = \frac{df}{dx}(a)$ cette limite.

On a $f'(a) = (\mathbf{Re} f)'(a) + i(\mathbf{Im} f)'(a)$.

Définition (équivalence)

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition - Taux de variations ou parties réelle et imaginaire

Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$, $a \in I$. On définit la fonction τ_a sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- τ_a possède une limite en a (limite dans $\mathbb{C}$).
- $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ (fonctions à valeurs réelles) sont dérivables en a.

On dit alors que f est dérivable en a. On note $f'(a) = Df(a) = \dfrac{df}{dx}(a)$ cette limite.
On a $f'(a) = (\mathbf{Re}f)'(a) + i(\mathbf{Im}f)'(a)$.

Remarque Démonstration ?

Dérivable donc continue

Proposition - Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité (en un point)

Si $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Dérivable donc continue

Proposition - Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité (en un point)

Si $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration

Dérivable donc continue

Proposition - Dérivabilité ⇒ Continuité (en un point)

Si $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration

Proposition - Dérivabilité ⇒ Continuité (sur un intervalle)

f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas elle est continue sur I.

Dérivation successive

Définition - Dérivations successives

On définit les dérivées successives de la même manière que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n-ième est continue sur I.
On dit qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n (soit si elle est dérivable à n'importe quel ordre).
On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

Stabilité

Proposition - Stabilité

Soient $f,g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ dérivables en a et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ alors

- $\lambda f + \mu g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas en a) sont dérivables en a, les formules donnant les dérivées étant les mêmes que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Si $\phi \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$ ($\phi(J) \subset I$) est une fonction dérivable en $\phi(a)$ alors $f \circ \phi$ est dérivable en a et $(f \circ \phi)'(a) = \phi'(a) f'(\phi(a))$
- $\overline{f}$ est dérivable en a et $(\overline{f})'(a) = \overline{f'(a)}$.
- L'exponentielle complexe de f $(e^f : x \longmapsto e^{f(x)} = e^{\mathbf{Re} f(x)}(\cos(\mathbf{Im} f(x)) + i \sin(\mathbf{Im} f(x)))$ est dérivable en a et $(e^f)'(a) = f'(a) e^{f(a)}$.

Stabilité

Plus généralement encore :

Propostion - Stabilité

On a donc que si $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ sont dérivables sur I, ϕ dérivable sur J, alors $\lambda f + \mu g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur I), $f \circ \phi$, $\overline{f}$, e^f sont dérivables sur I avec les formules usuelles de dérivation.

Stabilité

Propostion - Généralisation au dérivée n-ièmes

- $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ admet une dérivée n-ième sur I si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ admettent une dérivée n-ième sur I et alors :
$$\mathbf{Re}(f^{(n)}) = (\mathbf{Re} f)^{(n)} \text{ et } \mathbf{Im}(f^{(n)}) = (\mathbf{Im} f)^{(n)}$$
- Si $f, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ sont n fois dérivables sur I (resp. de classe $\mathscr{C}^n$ sur I) alors $\lambda f + \mu g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur I) sont n fois dérivables sur I (resp. de classe $\mathscr{C}^n$ sur I) et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \text{(formule de Leibniz)}$$

Extension ?

Exercice

Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

Extension ?

<u>Exercice</u>

Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

1. $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur I est constante sur I si et seulement f' est nulle sur I

Extension ?

Exercice

Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

1. $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ dérivable sur I est constante sur I si et seulement f' est nulle sur I
2. Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.

Extension ?

<u>Exercice</u>

Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

1. $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur I est constante sur I si et seulement f' est nulle sur I
2. Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.
3. Inégalité des accroissements finis.
   Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ (avec $a < b$) telle que $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant M$. Alors
   $$\left| f(b) - f(a) \right| \leqslant M|b-a|.$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

- f dérivable en a, si le taux de variations admet une limite ou si $\mathbf{Re}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont dérivables.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

- f dérivable en a, si le taux de variations admet une limite ou si $\mathbf{Re}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont dérivables.
- Généralisation pour la dérivée d'ordre n.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

- f dérivable en a, si le taux de variations admet une limite ou si $\mathbf{Re}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont dérivables.
- Généralisation pour la dérivée d'ordre n.
- En terme de calculs : tout va toujours comme pour les fonctions de $I \to \mathbb{R}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

- f dérivable en a, si le taux de variations admet une limite ou si $\mathbf{Re}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont dérivables.
- Généralisation pour la dérivée d'ordre n.
- En terme de calculs : tout va toujours comme pour les fonctions de $I \to \mathbb{R}$.
- En terme de proposition : on garde l'inégalité des accroissements finis, mais on perd le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 14 : Convexité
- Exercice n° 421 & 424