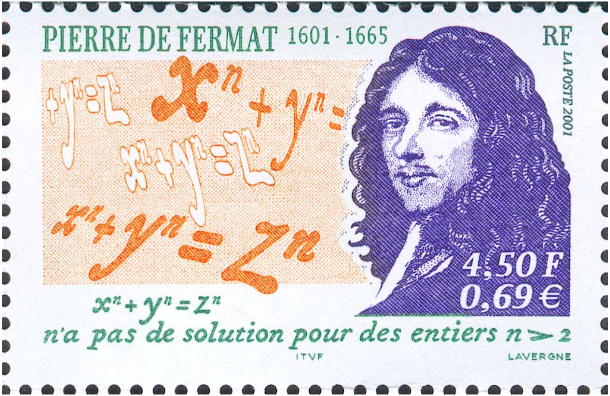


Leçon 60 - Convexité

30 janvier 2025

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Problèmes

Problème Une dérivée seconde positive ?

Problèmes

Problème Une dérivée seconde positive ?

Problème Convexité $\Rightarrow$ Dérivabilité ?

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Segment

Analyse - Equation paramétrique d'un segment.

Segment

Analyse - Equation paramétrique d'un segment.

Paramétrisation du segment $[a, b]$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$,

$$t \in [a, b] \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } t = \lambda a + (1 - \lambda) b.$$

A savoir, ce nombre λ vérifie : $\lambda = \dfrac{t - b}{a - b}$.

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Définition

Définition - Fonction convexe et concave

On dit que f est convexe sur I si :
$\forall\ x, y \in I, \forall\ \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$
Lorsque l'inégalité est stricte ($\lambda \neq 0$ et 1), on dit que f est strictement convexe.
On dit que f est concave (si $-f$ est convexe) sur I si
$\forall\ x, y \in I, \forall\ \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$

Définition

Définition - Fonction convexe et concave

On dit que f est convexe sur I si :

$\forall\ x, y \in I, \forall\ \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$

Lorsque l'inégalité est stricte ($\lambda \neq 0$ et 1), on dit que f est strictement convexe.

On dit que f est concave (si $-f$ est convexe) sur I si

$\forall\ x, y \in I, \forall\ \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$

Définition

Définition - Fonction convexe et concave

On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall\ x,y \in I, \forall\ \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lorsque l'inégalité est stricte ($\lambda \neq 0$ et 1), on dit que f est strictement convexe.

On dit que f est concave (si $-f$ est convexe) sur I si

$$\forall\ x,y \in I, \forall\ \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

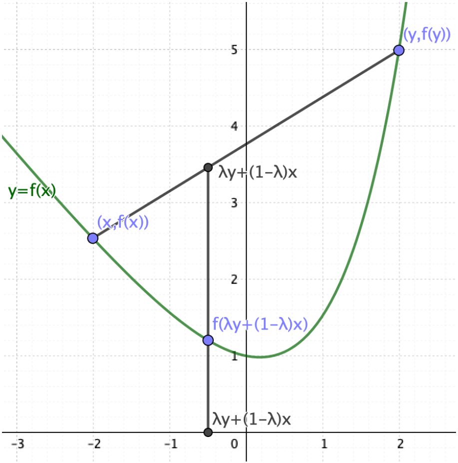
Exemple $x \mapsto x^2$.

Représentation

Remarque Critère de convexité.

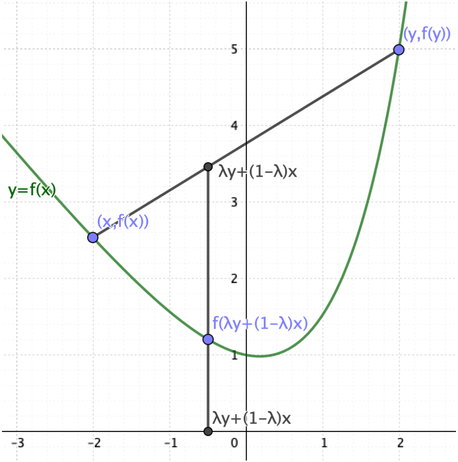
Représentation

Remarque Critère de convexité.



Représentation

Remarque Critère de convexité.



Exercice

Que dire de f si f est convexe et concave sur I

Inégalité paramétrique explicite

Savoir-faire. Inégalité de convexité de manière explicite

On cherche à énoncer l'inégalité de convexité pour $z \in [x, y]$.

On a alors $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ avec $\lambda = \dfrac{z-y}{x-y}$ et $1-\lambda = \dfrac{z-x}{y-x}$.

On a alors :

$$f(z) \leqslant \frac{z-y}{x-y} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y) = \underbrace{\frac{(z-y)f(x) - (x-z)f(y)}{x-y}}_{= \frac{z(f(x)-f(y)) - (xf(y)+yf(x))}{x-y}}$$

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Stabilité

Proposition - Stabilité

Si f et g sont convexes sur I, alors $f+g$ est convexe sur I.
Si f est convexe sur I et $k \geqslant 0$. Alors kf est convexe sur I.

Stabilité

Proposition - Stabilité

Si f et g sont convexes sur I, alors $f+g$ est convexe sur I.
Si f est convexe sur I et $k \geqslant 0$. Alors kf est convexe sur I.

Démonstration

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Généralisation

Proposition - Inégalité de Jensen

Si f est convexe sur I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots a_n \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)$$

Généralisation

Proposition - Inégalité de Jensen

Si f est convexe sur I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots a_n \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)$$

Démonstration

Généralisation

Proposition - Inégalité de Jensen

Si f est convexe sur I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots a_n \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)$$

Démonstration

Savoir-faire. Normaliser les coefficients pour la convexité

On notera la technique classique qui consiste étant donné une famille de coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$ positifs tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i$ possède une valeur S de considérer $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{S}$.

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f.

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f.

Lemme - Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I. Alors pour tout $x, y, z \in I$ et $x < y < z$,

$$\text{on a } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f.

Lemme - Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I. Alors pour tout $x, y, z \in I$ et $x < y < z$,

$$\text{on a } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Démonstration

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f.

Lemme - Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I. Alors pour tout $x, y, z \in I$ et $x < y < z$,

$$\text{on a } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Démonstration

Proposition - Croissance des pentes

Soit f définie sur I.

f est convexe sur I si et seulement si,

$$\text{pour tout } a \in I,\ \varphi_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}$$

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f.

Lemme - Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I. Alors pour tout $x, y, z \in I$ et $x < y < z$,

$$\text{on a } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Démonstration

Proposition - Croissance des pentes

Soit f définie sur I.

f est convexe sur I si et seulement si,

$$\text{pour tout } a \in I,\ \varphi_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}$$

Démonstration

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Tangente

On suppose localement (dans ce cours) que f est dérivable

Propriété - Inégalité des tangentes

Soit f convexe sur I.
On suppose de plus que f est dérivable sur I.
Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Tangente

On suppose localement (dans ce cours) que f est dérivable

Propriété - Inégalité des tangentes

Soit f convexe sur I.
On suppose de plus que f est dérivable sur I.
Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Démonstration

Tangente

On suppose localement (dans ce cours) que f est dérivable

Propriété - Inégalité des tangentes

Soit f convexe sur I.
On suppose de plus que f est dérivable sur I.
Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Démonstration

Selon que l'on cherche une majoration de $f(x)$ ou une minoration :

Savoir-faire. Utilisation de la convexité (inégalités)

Trois façons d'exploiter la convexité d'une fonction :

- La comparaison à la corde qui donne un majorant à $f(x)$
- La comparaison à la tangente qui donne un minorant à $f(x)$
- La comparaison des pentes, croissantes (avec le lemme des trois pentes ou directement).

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Convexité implique continuité

Remarque Rappel - Intérieur

Convexité implique continuité

Remarque Rappel - Intérieur

Proposition - Convexité implique continuité

Soit I un intervalle.

Si f est une fonction convexe sur I, alors I est continue sur $\overset{\circ}{I}$ (l'intérieur de I).

Convexité implique continuité

Remarque Rappel - Intérieur

Proposition - Convexité implique continuité

Soit I un intervalle.

Si f est une fonction convexe sur I, alors I est continue sur $\mathring{I}$ (l'intérieur de I).

Démonstration

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Un critère de convexité

Lorsqu'une fonction est suffisamment régulière, démontrer sa convexité est simple.

Un critère de convexité

Lorsqu'une fonction est suffisamment régulière, démontrer sa convexité est simple.

Proposition - Critère de convexité avec sa dérivée

Si f est dérivable sur I, alors f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Un critère de convexité

Lorsqu'une fonction est suffisamment régulière, démontrer sa convexité est simple.

Proposition - Critère de convexité avec sa dérivée

Si f est dérivable sur I, alors f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Démonstration

Savoir-faire

Savoir-faire. Démontrer qu'une fonction est convexe

Dans de nombreux cas, on montre que f est convexe en montrant que f est dérivable et f' croissante.
Et la plupart du temps, on a f dérivable deux fois. Dans ce cas, f est convexe si (et seulement si) $f'' \geqslant 0$.

Savoir-faire

Savoir-faire. Démontrer qu'une fonction est convexe

Dans de nombreux cas, on montre que f est convexe en montrant que f est dérivable et f' croissante.
Et la plupart du temps, on a f dérivable deux fois. Dans ce cas, f est convexe si (et seulement si) $f'' \geqslant 0$.

<u>Exercice</u>

1. Montrer que $\exp$ est convexe.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Dérivabilité par la convexité

Proposition - Dérivabilité à gauche et à droite

Soit f est convexe sur l'intervalle I.
Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur de I et pour tout $x \in \mathring{I}$, $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$.

Mais on n'a pas nécessairement $f'_g(x) = f'_d(x)$, comme pour $x \mapsto |x|$ sinon f serait dérivable en x.

Dérivabilité par la convexité

Proposition - Dérivabilité à gauche et à droite

Soit f est convexe sur l'intervalle I.
Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur de I et pour tout $x \in \mathring{I}$, $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$.

Mais on n'a pas nécessairement $f'_g(x) = f'_d(x)$, comme pour $x \longmapsto |x|$ sinon f serait dérivable en x.

Démonstration

Dérivabilité par la convexité

Proposition - Dérivabilité à gauche et à droite

Soit f est convexe sur l'intervalle I.
Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur de I et pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$.

Mais on n'a pas nécessairement $f'_g(x) = f'_d(x)$, comme pour $x \longmapsto |x|$ sinon f serait dérivable en x.

Démonstration

On retrouve comme corollaire la continuité de f en x.

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convexité

- f convexe sur I : $\forall\ a,b \in I, \forall\ \lambda \in [0,1]$,
  $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convexité

- f convexe sur I : $\forall\ a, b \in I, \forall\ \lambda \in [0,1]$,
  $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$.
- Inégalité des trois pentes.

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

- f convexe sur I : $\forall\ a, b \in I, \forall\ \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.
- Inégalité des trois pentes.
- Critère de convexité si f dérivable (une ou deux fois).

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convexité

- f convexe sur I : $\forall\ a, b \in I, \forall\ \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$.
- Inégalité des trois pentes.
- Critère de convexité si f dérivable (une ou deux fois).
- Et récipoquement...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convexité

$\Rightarrow$ En déduire des inégalités

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convexité

$\Rightarrow$ En déduire des inégalités

- Inégalités de Jensen

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convexité

$\Rightarrow$ En déduire des inégalités

- Inégalités de Jensen
- Majoration : f au-dessous des cordes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convexité

$\Rightarrow$ En déduire des inégalités

- Inégalités de Jensen
- Majoration : f au-dessous des cordes
- Minoration : f au-dessus des tangentes

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

- Inégalités de Jensen
- Majoration : f au-dessous des cordes
- Minoration : f au-dessus des tangentes
- En terme de proposition : on garde l'inégalité des accroissements finis, mais on perd le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 23 : Développements limités
- Exercice pour vendredi n° 434 & 438 (+ activités)

  Activité ! !
- Exercice pour mardi : n°442, 443 (bonus : 447)