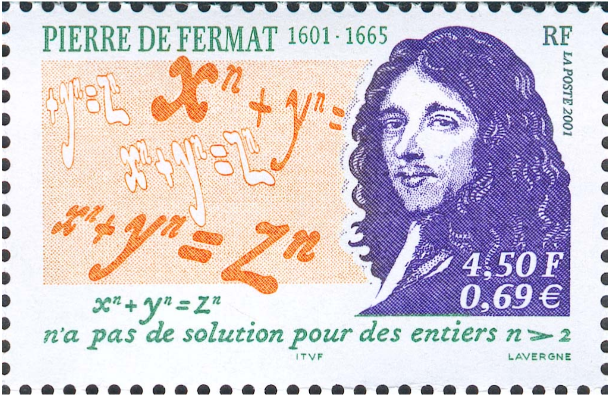

Leçon 61 - Développements limités

4 février 2025

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

    2.1. Rappel : le cas des suites
    2.2. Définitions
    2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
    2.4. Echelle de comparaison
    2.5. Algèbre des relations de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Zoom sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Geogebra

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$

Geogebra

Voisinage de 0 ; $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms
$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$
Geogebra
Voisinage de 0 ; $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3$
Voisinage de $-\pi$; $f(x) \approx \dfrac{1 - e^{-x}}{x} + e^{-\pi}(-1 + \frac{1}{2}x)$

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Geogebra

Voisinage de 0 ; $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3$

Voisinage de $-\pi$; $f(x) \approx \dfrac{1 - e^{-x}}{x} + e^{-\pi}(-1 + \frac{1}{2}x)$

Heuristique. Développement limité

1. On remplace une fonction par un développement mieux maîtrisé (polynôme. . .)
2. Cela dépend du voisinage du point considéré.
3. Plus on souhaite qu'il soit bon, plus il faudra qu'il y ait de coefficients.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

La suite du cours

Il est d'abord nécessaire de comprendre comment comparer deux fonctions (celle de référence et sa version locale polynomiale). On s'intéresse donc dans cette partie aux relations de comparaison entre fonctions.
Le principe est le même pour les suites (mais étudiées toujours uniquement en $n \to +\infty$).

La suite du cours

Il est d'abord nécessaire de comprendre comment comparer deux fonctions (celle de référence et sa version locale polynomiale). On s'intéresse donc dans cette partie aux relations de comparaison entre fonctions.
Le principe est le même pour les suites (mais étudiées toujours uniquement en $n \to +\infty$).

Attention. Selon le point

Il n'est jamais trop tard pour insister : la fonction (polynomiale - par exemple) plus simple qui décrit f **dépend du point** auprès duquel on est amené à faire l'étude.
Le résultat au voisinage de 0, n'a rien à voir avec celui au voisinage de $-\pi$! (par exemple).

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Définition

Définition - Définition généralisée

Soient (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que

- (u_n) est négligeable devant (v_n), notée $u_n = o(v_n)$ si
  $$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant \epsilon |v_n|.$$
- (u_n) est équivalente à (v_n), notée $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(v_n)$
- (u_n) est dominée par (v_n), notée $u_n = O(v_n)$ si
  $$\exists\ C > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant C|v_n|.$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Savoir-faire

Savoir-faire. Etude de négligeabilité/équivalence/domination...d'une suite

Deux cas fréquents pour étudier une suite (u_n) :

- si la suite $(u_n) = f(n)$, alors en fait on étudie directement la fonction f...
  Très souvent, on se *ramène* à cette situation.
- si la suite est définie implicitement ou par récurrence, on étudie la limite de $\frac{u_n}{v_n}$ où (v_n) est le candidat pour être respectivement : le facteur de négligeabilité/d'équivalence/de domination (dans ce cas la limite vaut respectivement 0 / 1 / est bornée.)

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Savoir-faire

Savoir-faire. Etude de négligeabilité/équivalence/domination...d'une suite

Deux cas fréquents pour étudier une suite (u_n) :

- si la suite $(u_n) = f(n)$, alors en fait on étudie directement la fonction $f\dots$
  Très souvent, on se *ramène* à cette situation.
- si la suite est définie implicitement ou par récurrence, on étudie la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$ où (v_n) est le candidat pour être respectivement : le facteur de négligeabilité/d'équivalence/de domination (dans ce cas la limite vaut respectivement 0 / 1 / est bornée.)

Remarque Rappels

- $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_n \ln n$

1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Savoir-faire

Savoir-faire. Etude de négligeabilité/équivalence/domination...d'une suite

Deux cas fréquents pour étudier une suite (u_n) :

- si la suite $(u_n) = f(n)$, alors en fait on étudie directement la fonction $f\dots$
  Très souvent, on se *ramène* à cette situation.
- si la suite est définie implicitement ou par récurrence, on étudie la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$ où (v_n) est le candidat pour être respectivement : le facteur de négligeabilité/d'équivalence/de domination (dans ce cas la limite vaut respectivement 0 / 1 / est bornée.)

Remarque Rappels

- $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_n \ln n$

Nous ne reviendrons plus sur le cas des suites

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

- 2.1. Rappel : le cas des suites
- 2.2. Définitions
- 2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
- 2.4. Echelle de comparaison
- 2.5. Algèbre des relations de comparaison

Définitions

Définition - Définition généralisée

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I. On dit que

- f est négligeable devant g au voisinage de a, notée $f \underset{a}{=} o(g)$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \,|\, \forall x \in V, |f(x)| \leqslant \epsilon |g(x)|.$$

- f est équivalente à g au voisinage de a si $f - g \underset{a}{=} o(g)$.
- f est dominée par g au voisinage de a notée $f \underset{a}{=} O(g)$si

$$\exists C > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \,|\, \forall x \in V, |f(x)| \leqslant C |g(x)|.$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Définitions

Définition - Définition généralisée

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I. On dit que

- f est négligeable devant g au voisinage de a, notée $f \underset{a}{=} o(g)$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leqslant \epsilon |g(x)|.$$

- f est équivalente à g au voisinage de a si $f - g \underset{a}{=} o(g)$.
- f est dominée par g au voisinage de a notée $f \underset{a}{=} O(g)$si

$$\exists C > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leqslant C |g(x)|.$$

Remarque Ensemble $g^{-1}(\{0\})$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Avec une fonction auxiliaire

Proposition - Caractérisation avec une fonction auxiliaire

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I.
Alors on a $f =_a o(g)$ si et seulement si
$\exists\ h : I \to \mathbb{R}$ avec $h \underset{a}{\rightarrow} 0$ et $f = hg$ au voisinage de a.
Alors on a $f \sim_a g$ si et seulement si
$\exists\ h : I \to \mathbb{R}$ avec $h \underset{a}{\rightarrow} 1$ et $f = hg$ au voisinage de a.
Alors on a $f =_a O(g)$ si et seulement si
$\exists\ h : I \to \mathbb{R}$ avec h bornée au voisinage de a et $f = hg$ au voisinage de a.

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Avec une fonction auxiliaire

Proposition - Caractérisation avec une fonction auxiliaire

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I.
Alors on a $f =_a o(g)$ si et seulement si
  $\exists\, h : I \to \mathbb{R}$ avec $h \underset{a}{\rightarrow} 0$ et $f = hg$ au voisinage de a.
Alors on a $f \sim_a g$ si et seulement si
  $\exists\, h : I \to \mathbb{R}$ avec $h \underset{a}{\rightarrow} 1$ et $f = hg$ au voisinage de a.
Alors on a $f =_a O(g)$ si et seulement si
  $\exists\, h : I \to \mathbb{R}$ avec h bornée au voisinage de a et $f = hg$ au voisinage de a.

Démonstration

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Critères équivalents

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Proposition - Domination, négligeabilité, équivalence pour les fonctions

Soient $f,g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I ($a \in \overline{I}$).

- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a, x\notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 0$ et $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$.
- f est équivalente à g au voisinage de a ssi $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a, x\notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 1$ et $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$.
- f est dominée par g au voisinage de a ssi la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a et $g^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\})$ sur un voisinage de a.

Critères équivalents

Attention. Insistons bien

Pour les fonctions, il s'agit bien d'une relation LOCALE (voisinage de a).
On peut avoir $f = o(g)$ pour $x \to a$ ET $g = o(f)$ pour $x \to b\dots$
Donc « $f = o(g)$ », sans précision supplémentaire NE SIGNIFIE RIEN

Critères équivalents

Proposition - Domination, négligeabilité, équivalence pour les fonctions

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I ($a \in \overline{I}$).

- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a, x \notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 0$ et $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$.
- f est équivalente à g au voisinage de a ssi $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a, x \notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 1$ et $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$.
- f est dominée par g au voisinage de a ssi la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a et $g^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\})$ sur un voisinage de a.

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Critères équivalents

Proposition - Domination, négligeabilité, équivalence pour les fonctions

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I ($a \in \overline{I}$).

- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a, x \notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 0$ et $\exists V \in \mathcal{V}_a$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$.
- f est équivalente à g au voisinage de a ssi $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a, x \notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 1$ et $\exists V \in \mathcal{V}_a$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$.
- f est dominée par g au voisinage de a ssi la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a et $g^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\})$ sur un voisinage de a.

Démonstration

Exercice Faire les autres démonstrations.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Savoir-faire

Savoir-faire. Avec une fonction « relative »

Notons, pour tout $x \in I$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Alors

- f est dominée par g au voisinage de a ssi h est bornée au voisinage de a.
- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi $h \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
- f est équivalente à g au voisinage de a ssi $h \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Comparaison à $t \mapsto 1$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Proposition - Comparaison à une fonction constante

Soit f définie au voisinage de a. On a

$$\begin{aligned} f \underset{a}{=} O(1) \quad &\Leftrightarrow f \text{ est bornée au voisinage de } a. \\ f \underset{a}{=} o(1) \quad &\Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Relations d'équivalence

Les propositions et théorèmes suivants se démontrent comme pour les suites (les résultats sont totalement équivalents).

Proposition - Equivalence : relation d'équivalence

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a. On a

- $f \underset{a}{\sim} f$ (réflexivité).
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie).
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité).

La relation d'équivalence $\sim$ est donc une relation d'équivalence

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Relations d'équivalence

Les propositions et théorèmes suivants se démontrent comme pour les suites (les résultats sont totalement équivalents).

Proposition - Equivalence : relation d'équivalence

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a. On a

- $f \underset{a}{\sim} f$ (réflexivité).
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie).
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité).

La relation d'équivalence $\sim$ est donc une relation d'équivalence

Démonstration

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a. On a

- $f = O(f)$ au voisinage de a (réflexivité)
- Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a alors $f = O(h)$ au voisinage de a. (transitivité)

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a. On a

- $f = O(f)$ au voisinage de a (réflexivité)
- Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a alors $f = O(h)$ au voisinage de a. (transitivité)

Démonstration

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a. On a

- $f = O(f)$ au voisinage de a (réflexivité)
- Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a alors $f = O(h)$ au voisinage de a. (transitivité)

Démonstration

Proposition - Liens entre les relations

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$
- On a : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g)$ (ou encore noté : $f = g + o(g)$).
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(f)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \underset{a}{=} o(f) \Leftrightarrow h \underset{a}{=} o(g)$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a. On a

- $f = O(f)$ au voisinage de a (réflexivité)
- Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a alors $f = O(h)$ au voisinage de a. (transitivité)

Démonstration

Proposition - Liens entre les relations

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$
- On a : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g)$ (ou encore noté : $f = g + o(g)$).
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(f)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \underset{a}{=} o(f) \Leftrightarrow h \underset{a}{=} o(g)$.

Démonstration

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Echelle de comparaison épaisse

Proposition - Comparaisons usuelles

Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a

$$(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x}),$$

$$|\ln x|^\beta \underset{0}{=} o(\frac{1}{x^\alpha},) \qquad e^{\beta x} \underset{-\infty}{=} o(\frac{1}{|x|^\alpha}).$$

On a également pour $0 < p < q$:

$$x^p \underset{+\infty}{=} o(x^q) \qquad x^q \underset{0}{=} o(x^p) \quad \text{et} \quad (x-a)^q \underset{a}{=} o((x-a)^p).$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Echelle de comparaison épaisse

Proposition - Comparaisons usuelles

Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a

$$(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x}),$$

$$|\ln x|^\beta \underset{0}{=} o(\frac{1}{x^\alpha},) \qquad e^{\beta x} \underset{-\infty}{=} o(\frac{1}{|x|^\alpha}).$$

On a également pour $0 < p < q$:

$$x^p \underset{+\infty}{=} o(x^q) \qquad x^q \underset{0}{=} o(x^p) \quad \text{et} \quad (x-a)^q \underset{a}{=} o((x-a)^p).$$

En d'autres termes, aux bornes des intervalles de définition, "l'exponentielle domine(=« *l'emporte sur* ») la puissance, la puissance domine(=« *l'emporte sur* ») le logarithme" (croissances comparées).

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Echelle de comparaison fine

Proposition - Taux d'accroissement réinterprété

En utilisant les limites classiques (taux d'accroissement - ou règle de Lhospital), on a

1. $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2. $\tan x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\tan x \underset{0}{\sim} x$
3. $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ ou encore $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$ ou encore $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Echelle de comparaison fine

Proposition - Taux d'accroissement réinterprété

En utilisant les limites classiques (taux d'accroissement - ou règle de Lhospital), on a

1. $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2. $\tan x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\tan x \underset{0}{\sim} x$
3. $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ ou encore $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$ ou encore $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Algèbre des relations de comparaison

Proposition - Opérations avec o ou O

Soient f,g,h,k quatre fonctions définies au voisinage de a. On a

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f+g \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$
- Si $f(x)$ et $g(x) \neq 0$ pour $x \in I \subset V_a$ et si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\frac{1}{g} \underset{a}{=} o(\frac{1}{f})$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$.
- Si f et g sont positives avec $f \underset{a}{=} o(g)$, alors pour $\alpha > 0$, $f^\alpha \underset{a}{=} o(g^\alpha)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $hf \underset{a}{=} o(hg)$

Les propriétés sont encore vraies en remplacant les « o »par des « O ».

Algèbre des relations de comparaison

Proposition - Opérations avec o ou O

Soient f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de a. On a

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$
- Si $f(x)$ et $g(x) \neq 0$ pour $x \in I \subset V_a$ et si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\frac{1}{g} \underset{a}{=} o(\frac{1}{f})$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$.
- Si f et g sont positives avec $f \underset{a}{=} o(g)$, alors pour $\alpha > 0$, $f^\alpha \underset{a}{=} o(g^\alpha)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $hf \underset{a}{=} o(hg)$

Les propriétés sont encore vraies en remplacant les « o »par des « O ».

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Algèbre des relations de comparaison

Remarque Où avons-nous besoin de $f, g > 0$?

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Algèbre des relations de comparaison

Remarque Où avons-nous besoin de $f, g > 0$?

Théorème - Signe d'une fonction

Si f est équivalente à g en a, alors il existe $V \neq \{a\}$ voisinage de a, tel que f et g sont de même signe sur $V \setminus \{a\}$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Algèbre des relations de comparaison

Remarque Où avons-nous besoin de $f, g > 0$?

Théorème - Signe d'une fonction

Si f est équivalente à g en a, alors il existe $V \neq \{a\}$ voisinage de a, tel que f et g sont de même signe sur $V \setminus \{a\}$.

Exercice

Faire la démonstration

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Algèbre des relations de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Théorème - Equivalents et limite

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$;
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, alors $f \underset{a}{\sim} \ell$.

Algèbre des relations de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Proposition - Opérations

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage de a. On a

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$ (et $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{k}$ si h ne s'annule pas)
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, f et g strictement positives (une suffit...) alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$

Composition

En appliquant le théorème de composition des limites, nous avons un nouveau résultat :

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Composition

En appliquant le théorème de composition des limites, nous avons un nouveau résultat :

Proposition - Substitution dans les relations de comparaison

Soient ϕ définie sur un voisinage de a telle que $\lim_{t\to a}\phi(t) = b$, f, g définies sur un voisinage de b. Alors :

$$f \underset{b}{=} O(g) \Rightarrow f\circ\phi \underset{a}{=} O(g\circ\phi)$$

$$f \underset{b}{=} o(g) \Rightarrow f\circ\phi \underset{a}{=} o(g\circ\phi)$$

$$f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow f\circ\phi \underset{a}{\sim} g\circ\phi$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Attentions !

Attention. Ce qui ne marche pas

D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

- Somme : en 0 avec $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t + t^2$, $g_1(t) = g_2(t) = -t$ on a $f_1 \underset{0}{\sim} f_2$ mais $f_1 + g_1 \underset{0}{\not\sim} f_2 + g_2$.
- Exponentielle : en $+\infty$ avec $f(t) = t^2$ et $g(t) = t^2 + t$ on a $f \underset{+\infty}{\sim} g$ mais $e^f \underset{+\infty}{\not\sim} e^g$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Attentions !

Attention. Ce qui ne marche pas

D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

- Somme : en 0 avec $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t + t^2$, $g_1(t) = g_2(t) = -t$ on a $f_1 \underset{0}{\sim} f_2$ mais $f_1 + g_1 \underset{0}{\not\sim} f_2 + g_2$.
- Exponentielle : en $+\infty$ avec $f(t) = t^2$ et $g(t) = t^2 + t$ on a $f \underset{+\infty}{\sim} g$ mais $e^f \underset{+\infty}{\not\sim} e^g$.

<u>Exercice</u>

Déterminer un équivalent de $\ln(\sin x)$ en 0.

Attentions !

Attention. Rien de plus TERRIBLE. . .

Ne pas écrire $f \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la définition précédente, et avec la définition générale qui suit, cela signifie que f est nulle dans un voisinage de a (ce qui est bien rare...)

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Attentions !

Attention. Rien de plus TERRIBLE. . .

Ne pas écrire $f \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la définition précédente, et avec la définition générale qui suit, cela signifie que f est nulle dans un voisinage de a (ce qui est bien rare...)

Attention. Confusion fréquente

Ne pas confondre $f \sim g$ et $f(x) - g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
Par exemple $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $x + 1 - x = 1$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Attentions !

Attention. Rien de plus TERRIBLE...

Ne pas écrire $f \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la définition précédente, et avec la définition générale qui suit, cela signifie que f est nulle dans un voisinage de a (ce qui est bien rare...)

Attention. Confusion fréquente

Ne pas confondre $f \sim g$ et $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
Par exemple $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $x + 1 - x = 1$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

<u>Exercice</u>

Faire les démonstrations

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

- Fonction analytique dont l'expression est compliquée

Leçon 61 - Développements limités

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

- Fonction analytique dont l'expression est compliquée
- Quelle fonction simple peut la remplacer, **au voisinage d'un point** ?

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

- Fonction analytique dont l'expression est compliquée
- Quelle fonction simple peut la remplacer, **au voisinage d'un point** ?
- Une constante, une droite, une conique. . .

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Problématique

$\Rightarrow$ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

- Au voisinage du point a : fonctions équivalentes, dominées, négligeables...

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

- Au voisinage du point a : fonctions équivalentes, dominées, négligeables...
- Comme pour les suites. Avec en plus : la composition et les taux d'accroissement

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

- Au voisinage du point a : fonctions équivalentes, dominées, négligeables...
- Comme pour les suites. Avec en plus : la composition et les taux d'accroissement
- Beaucoup de savoir-faire à maîtriser

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

- Au voisinage du point a : fonctions équivalentes, dominées, négligeables...
- Comme pour les suites. Avec en plus : la composition et les taux d'accroissement
- Beaucoup de savoir-faire à maîtriser
- En encore plus d'erreurs potentielles à éviter...

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 23 : Développements limités
  3. Développements limités
- Exercice n° 449 & 451
- TD de jeudi :
  8h-10h : 450 (impairs), 457, 452, 464, 459
  10h-12h : 450 (pairs), 458, 453, 465, 460

⇒ Problématique
⇒ Vocabulaire et premières propriétés
1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
2.1. Rappel : le cas des suites
2.2. Définitions
2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
2.4. Echelle de comparaison
2.5. Algèbre des relations de comparaison