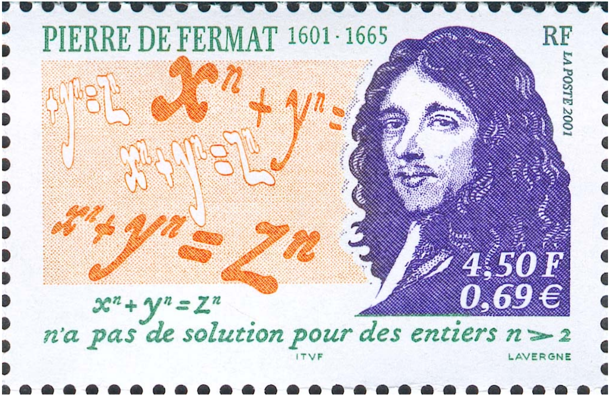

Leçon 62 - Développements limités

5 février 2025

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

Développement limité en $a \in \mathbb{R}$

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $n \in \mathbb{N}$.

Définition - DL en un point réel

Soit I un intervalle contenant a ou d'extrémité a. Soit f une fonction définie sur I sauf éventuellement en a, à valeurs dans K. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a (DL_n en a ou $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K_n[X]$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x \in I, f(x) &\underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \\ &\underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)\end{aligned}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x) \text{ où } \epsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{ou } f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

$P(x-a)$ s'appelle la partie régulière du DL_n de f en a.

Développement limité en $+\infty$

Définition - DL en ∞

Soit f une fonction définie sur $I = [a, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $\pm\infty$ s'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K_n[X]$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x \in I, f(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\\ &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).\end{aligned}$$

Développement limité en $+\infty$

Définition - DL en ∞

Soit f une fonction définie sur $I=[a,+\infty[$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $\pm\infty$ s'il existe un polynôme $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K_n[X]$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x\in I, f(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x^n}\right)\\ &= a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right).\end{aligned}$$

Remarque Ecriture

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de développements limités

3.4.Opérations

3.5. Généralisation

Propriété 1 : unicité

Théorème - Unicité

- Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞), il est unique.
- Si f admet un DL_n en a, alors f admet un DL_p en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞) pour tout $p \leqslant n$ obtenu en tronquant la partie régulière à la puissance p (c'est-à-dire en enlevant les monômes de degré $> p$ du polynôme).

Propriété 1 : unicité

Théorème - Unicité

- Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞), il est unique.
- Si f admet un DL_n en a, alors f admet un DL_p en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞) pour tout $p \leqslant n$ obtenu en tronquant la partie régulière à la puissance p (c'est-à-dire en enlevant les monômes de degré $> p$ du polynôme).

Démonstration

Conséquence

Corollaire - Lien avec la parité

- Si f admet en 0 un DL_n, $f(x) = P(x) + o(x^n)$, alors $g : x \mapsto f(-x)$ admet en 0 le DL_n

$$g(x) = P(-x) + o(x^n).$$

- Si f admet un DL_n en 0 et f paire (resp. f impaire) alors le DL ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Conséquence

Corollaire - Lien avec la parité

- Si f admet en 0 un DL_n, $f(x) = P(x) + o(x^n)$, alors $g : x \mapsto f(-x)$ admet en 0 le DL_n

$$g(x) = P(-x) + o(x^n).$$

- Si f admet un DL_n en 0 et f paire (resp. f impaire) alors le DL ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration

Prolongement

Proposition - Limites et équivalents

- Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ alors f est continue ou prolongeable par continuité en a, avec $f(a) = a_0$.
- Si $n \geqslant 1$, f (ou prolongement) est dérivable en a, de dérivée a_1.
- Le premier (si les puissances sont « rangées »comme il faut !) terme non nul d'un DL de f en a fournit un équivalent en a, ou encore si on a la **forme normalisée** d'un DL

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p}))$$

avec $a_p \neq 0$ et $n \geqslant p$

alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p$.

Prolongement

Proposition - Limites et équivalents

- Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ alors f est continue ou prolongeable par continuité en a, avec $f(a) = a_0$.
- Si $n \geqslant 1$, f (ou prolongement) est dérivable en a, de dérivée a_1.
- Le premier (si les puissances sont « rangées »comme il faut !) terme non nul d'un DL de f en a fournit un équivalent en a, ou encore si on a la **forme normalisée** d'un DL

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p}))$$

avec $a_p \neq 0$ et $n \geqslant p$

alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p$.

Remarque Généralisation en $+\infty$.

Prolongement

Proposition - Limites et équivalents

- Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ alors f est continue ou prolongeable par continuité en a, avec $f(a) = a_0$.
- Si $n \geqslant 1$, f (ou prolongement) est dérivable en a, de dérivée a_1.
- Le premier (si les puissances sont « rangées »comme il faut !) terme non nul d'un DL de f en a fournit un équivalent en a, ou encore si on a la **forme normalisée** d'un DL

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p}))$$

avec $a_p \neq 0$ et $n \geqslant p$

alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p$.

Remarque Généralisation en $+\infty$.

Démonstration

Attention à la généralisation...

Attention. A ne pas généraliser pour $f^{(2)}(a)$

Contre-exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors f admet un DL_{99} en 0 ($f(x) = 0 + o(x^{99})$) mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Attention à la généralisation...

Attention. A ne pas généraliser pour $f^{(2)}(a)$

Contre-exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors f admet un DL_{99} en 0 ($f(x) = 0 + o(x^{99})$) mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Savoir-faire. Obtenir un $DL_n(a)$ d'une fonction f

On se ramène usuellement en 0 :

- Pour obtenir un DL_n en a de f, on pose $h = x - a$, on effectue un DL_n en 0 de $g(h) = f(a+h)$ puis on remplace h par $x - a$.
- Pour obtenir un DL_n en ∞ de f, on pose $t = 1/x$, on effectue un DL_n en 0 de $g(t) = f(1/t)$ puis on remplace t par $1/x$.

Attention à la généralisation...

Attention. A ne pas généraliser pour $f^{(2)}(a)$

Contre-exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{100}\sin\frac{1}{x^{100}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet un DL_{99} en 0 ($f(x) = 0 + o(x^{99})$) mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Savoir-faire. Obtenir un $DL_n(a)$ d'une fonction f

On se ramène usuellement en 0 :

- Pour obtenir un DL_n en a de f, on pose $h = x - a$, on effectue un DL_n en 0 de $g(h) = f(a+h)$ puis on remplace h par $x - a$.
- Pour obtenir un DL_n en ∞ de f, on pose $t = 1/x$, on effectue un DL_n en 0 de $g(t) = f(1/t)$ puis on remplace t par $1/x$.

IL SUFFIT DONC DE SAVOIR OBTENIR LES $DL_n(0)$

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

Fonctions usuelles : séries géométriques

On cherche maintenant les $DL_n(0)$ des fonctions usuelles.

Théorème - Premières formules

Les fonctions $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1+x}$ admettent des DL_n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnés par :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Fonctions usuelles : séries géométriques

On cherche maintenant les $DL_n(0)$ des fonctions usuelles.

Théorème - Premières formules

Les fonctions $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1+x}$ admettent des DL_n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnés par :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Démonstration

Fonctions usuelles : primitivisation

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F)

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Fonctions usuelles : primitivisation

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F)

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

Fonctions usuelles : primitivisation

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F)

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

Démonstration

Fonctions usuelles : primitivisation

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F)

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

Démonstration

Corollaire - $Arctan$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Fonctions usuelles : primitivisation

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F)

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

Démonstration

Corollaire - $Arctan$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Démonstration

Dérivation ?

Attention - Mais on ne peut pas dériver ! !

Si f est dérivable, l'existence d'un DL_n pour f n'implique pas l'existence d'un DL_{n-1} pour f'.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors f admet un DL_{99} en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Dérivation ?

Attention - Mais on ne peut pas dériver ! !

Si f est dérivable, l'existence d'un DL_n pour f n'implique pas l'existence d'un DL_{n-1} pour f'.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors f admet un DL_{99} en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Remarque Mais tout n'est pas perdu. . .

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Théorème - Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans K, n fois dérivable en $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Théorème - Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans K, n fois dérivable en $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$

Démonstration

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Théorème - Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans K, n fois dérivable en $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$

Démonstration

Attention. Ne pas en dire trop

Cette formule donne uniquement un résultat **local**, elle NE sert donc QU'à préciser la fonction f au voisinage de a.

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Corollaire - Condition suffisante simple

Toute fonction n fois dérivable en a admet un DL_n en a, donné par la formule de Taylor-Young.

Ce résultat permet de retrouver les DL précédemment obtenus, mais également ceux d'autres fonctions usuelles :

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Proposition - Développements limités usuels en 0

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})(\text{ ou } o(x^{2p+1}))$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})(\text{ ou } o(x^{2p+2}))$$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})(\text{ ou } o(x^{2p+1}))$$

$$\mathrm{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})(\text{ ou } o(x^{2p+2}))$$

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Proposition - Développements limités usuels en 0

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})$$

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Proposition - Développements limités usuels en 0

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})$$

Démonstration

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Proposition - Développements limités usuels en 0

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+\ldots+\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) \quad (\alpha=\frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+o(x^2) \quad (\alpha=-\frac{1}{2})$$

Démonstration

Remarque Composition des DL = composition de polynômes

Application

Exercice

Terminer la démonstration pour obtenir le DL d'ordre 4 de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Application

Exercice

Terminer la démonstration pour obtenir le DL d'ordre 4 de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Savoir-faire. DL des fonctions de référence en une autre valeur

Supposons que $x \to a$. Alors $h = x - a \to 0$. On a respectivement :

- $\exp x = \exp(a+h) = e^a \exp(h) = e^a(1 + h + \frac{h^2}{2} \dots)$
- $\ln x = \ln(a+h) = \ln(a) + \ln(1 + \frac{h}{a}) = \ln a + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + \dots$
- $\cos x = \cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h = \cos a - h \sin a - \frac{h^2}{2} \cos a + \frac{h^3}{6} \sin a + \dots$
- $\mathrm{sh} x = \mathrm{sh}(a+h) = \mathrm{sh} a \mathrm{ch} h + \mathrm{ch} a \mathrm{sh} h = \mathrm{sh} a + h \mathrm{ch} a + \frac{h^2}{2} \mathrm{sh} a + \dots$
- $x^\alpha = (a+h)^\alpha = a^\alpha \left(1 + \frac{h}{a}\right)^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1} h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a^{\alpha-2} h^2 + \dots$

⇒ Qu’est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de développements limités

3.4.Opérations

3.5. Généralisation

Combinaison linéaire

Proposition - Combinaison linéaire

Si f et g admettent en a des DL_n alors pour $\lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en a, obtenu en faisant la combinaison linéaire correspondante des DL_n.
(résultat encore valable en ∞)

Combinaison linéaire

Proposition - Combinaison linéaire

Si f et g admettent en a des DL_n alors pour $\lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en a, obtenu en faisant la combinaison linéaire correspondante des DL_n.
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Combinaison linéaire

Proposition - Combinaison linéaire

Si f et g admettent en a des DL_n alors pour $\lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en a, obtenu en faisant la combinaison linéaire correspondante des DL_n.
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Exercice

Donner un DL_3 en 0 de $\cos x + 2\sin(-x)$.

Produit

Proposition - Produit

Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

Produit

Proposition - Produit

Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Produit

Proposition - Produit

Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Remarque Multiplication de polynôme.

Produit

Proposition - Produit

Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Remarque Multiplication de polynôme.

Exercice

Donner le DL_3 en 0 de $e^x\sqrt{1+x}$ et le DL_4 en 0 de $\sin^2 x$.

Composition

Proposition - Composition

Soient $f : I \to K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim_{x\to 0} \phi(x) = 0$.

On suppose que f admet un DL_n en 0, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$.

Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f\circ\phi(x) &= a_0 + a_1(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)) \\ &\quad + a_2(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))^2 + \cdots \\ &\quad + a_n(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

Composition

Proposition - Composition

Soient $f : I \to K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim_{x\to 0} \phi(x) = 0$.

On suppose que f admet un DL_n en 0, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$.

Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f\circ\phi(x) &= a_0 + a_1(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)) \\ &\quad + a_2(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))^2 + \cdots \\ &\quad + a_n(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

Remarque Comment s'y prendre

Composition

Proposition - Composition

Soient $f : I \to K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim_{x \to 0} \phi(x) = 0$.

On suppose que f admet un DL_n en 0, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$.

Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f \circ \phi(x) \quad &= a_0 + a_1(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)) \\ &\quad + a_2(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))^2 + \cdots \\ &\quad + a_n(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

Remarque Comment s'y prendre

Démonstration

Composition

Proposition - Composition

Soient $f : I \to K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim\limits_{x \to 0} \phi(x) = 0$.

On suppose que f admet un DL_n en 0,
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$.

Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f \circ \phi(x) &= a_0 + a_1(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)) \\ &\quad + a_2(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))^2 + \cdots \\ &\quad + a_n(b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

Exercice

Donner un DL_4 en 0 de $\ln(\cos x)$.

Application : inverse

Proposition - Inverse

Si f admet un DL_n en 0, $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$,

et $f(0) = a_0 \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ admet un DL_n en 0 obtenu en écrivant

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{f(0)} \times \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o(x^n)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{f(0)} \times \left(1 - u(x) + u(x)^2 + \cdots + (-1)^n u(x)^n + o(u(x)^n)\right)
\end{aligned}$$

où $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o(x^n)$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

En fait, il s'agit d'un corollaire de la proposition précédente. Il faut plus le prendre comme un savoir-faire.

Tangente en 0

<u>Exercice</u>

Donner le DL_5 en 0 de $\tan x$.

Tangente en 0

<u>Exercice</u>

Donner le DL_5 en 0 de $\tan x$.

Corollaire - $DL_3(0)$ de tan

$$\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Savoir-faire

Truc & Astruce pour le calcul. Méthode (Bilan)

Pour faire le $DL_n(a)$ de f.

1. On évalue (rapidement) la valeur numérique de $f(a)$ (elle peut être nulle ou non). On garde le résultat auprès de soi.
2. On fait le changement de variable
   - $x = a + h$ avec $x \to a$ ssi $h \to 0$ pour $a \in \mathbb{R}$
   - $x = \frac{1}{y}$ avec $x \to \infty$ ssi $y \to 0$ pour $a = \pm\infty$
3. On factorise par $f(a)$.
   Selon la nature de f, il peut y avoir des simplification. Normalement, on retrouve nécessairement des $DL_n(0)$ connus.
4. Il peut y avoir des compositions : $(1+U)^n$ ou $\frac{1}{1+U}$, $\ln(1+U)$...avec $U(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ (composition).
5. Beaucoup de développements. Comme d'habitude : on n'écrit pas trop, et on associe les coefficients au monôme h^k.

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

DL généralisé

Définition - Développement limité généralisé

On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n s'il existe $Q, R \in K[X]$, $P, S \in K_n[X]$ tels que :

$$\text{en } 0,\ f(x) = Q\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) + o(x^n)$$

$$\text{en } \pm\infty,\ f(x) = R(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

c'est-à-dire s'il existe $p \in \mathbb{N}^* (= \deg Q$ ou $\deg R)$ tel que, $x^p f(x)$ en 0, $\dfrac{1}{x^p} f(x)$ en $\pm\infty$, admette un DL_{n+p}

DL généralisé

Définition - Développement limité généralisé

On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n s'il existe $Q, R \in K[X]$, $P, S \in K_n[X]$ tels que :

$$\text{en } 0,\ f(x) = Q\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) + o(x^n)$$

$$\text{en } \pm\infty,\ f(x) = R(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

c'est-à-dire s'il existe $p \in \mathbb{N}^* (= \deg Q$ ou $\deg R)$ tel que, $x^p f(x)$ en 0, $\frac{1}{x^p} f(x)$ en $\pm\infty$, admette un DL_{n+p}

Exemple Retour sur l'exemple original : $\frac{e^x - 1}{\sin x}$ autour de $x = -\pi$

DAS

Définition - Développement asymptotique

On dit que f admet un développement aymptotique en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f peut s'écrire

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + o(f_n(x))$$

où pour tout k, $f_k(x) \underset{a}{=} o(f_{k-1}(x))$.

On peut par exemple avoir $f_k(x) = g(x)^k$ où $g(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en a ($g(x) = x^\alpha$ en 0 $(\alpha > 0)$, $\quad g(x) = e^{-x}$ en $+\infty$...).

$f_n(x)$ s'appelle la précision du DA.

DAS

Définition - Développement asymptotique

On dit que f admet un développement aymptotique en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f peut s'écrire

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + o(f_n(x))$$

où pour tout k, $f_k(x) \underset{a}{=} o(f_{k-1}(x))$.

On peut par exemple avoir $f_k(x) = g(x)^k$ où $g(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en a ($g(x) = x^\alpha$ en 0 ($\alpha > 0$), $\quad g(x) = e^{-x}$ en $+\infty$...).

$f_n(x)$ s'appelle la précision du DA.

<u>Exercice</u>

Déterminer un DA en 0 de $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ à la précision $x \ln x$, puis à la précision x^3.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

- Définition : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

- Définition : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
- Unicité !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

- Définition : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
- Unicité !
- Propriété immédiate : parité, limite et dérivabilite en a.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

- Définition : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
- Unicité !
- Propriété immédiate : parité, limite et dérivabilite en a.
- Fonctions usuelles :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) (\text{ ou } o(x^{2p+1}))$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) (\text{ ou } o(x^{2p+2}))$$
$$\text{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) (\text{ ou } o(x^{2p+1}))$$
$$\text{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) (\text{ ou } o(x^{2p+2}))$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \tfrac{1}{2})$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\tfrac{1}{2})$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

- Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

- Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young
- Stabilité (simple) par combinaison linéaire

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

- Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young
- Stabilité (simple) par combinaison linéaire
- Pour la multiplicité ou la composition : **anticiper** (! !) les calculs et ne pas tout calculer

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

- Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young
- Stabilité (simple) par combinaison linéaire
- Pour la multiplicité ou la composition : **anticiper** (!!) les calculs et ne pas tout calculer
- Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 23 : Développements limités
  4. Applications
- Exercice n° 455 & 456