



⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes
2. Vocabulaire
3. Développements limités
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

Leçon 63 - Développements limités

6 février 2025

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

3. Développements limités

4. Applications des DL

4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

3. Développements limités

4. Applications des DL

4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements limités

4. Applications des DL

4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

Savoir-faire. La force des développements limités

Les *DL* permettent d'avoir un équivalent (premier terme non nul) et, contrairement aux équivalents, ils peuvent être additionnés. C'est donc un outil "plus sûr" dans son maniement. L'équivalent permet ensuite d'avoir la limite.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

Savoir-faire. La force des développements limités

Les *DL* permettent d'avoir un équivalent (premier terme non nul) et, contrairement aux équivalents, ils peuvent être additionnés. C'est donc un outil "plus sûr" dans son maniement. L'équivalent permet ensuite d'avoir la limite.

On commence toujours par se ramener en 0 pour utiliser les *DL* usuels.

Exercice

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x \right) \frac{1}{x^2}$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Exercice

Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e.$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Exercice

Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e.$$

Exercice

Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \frac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos 3x}}$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

3. Développements limités

4. Applications des DL

4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements limités

4. Applications des DL

4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

Savoir-faire. Etude locale d'une courbe au voisinage d'un point

Les *DL* permettent d'avoir directement des résultats sur le comportement local d'une fonction plus précis que la limite ou l'équivalent en un point.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Exploitation graphique d'un DL en a

Si f admet en a un DL_k ($k \geq 2$) de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_k(x - a)^k + o((x - a)^k)$$

alors f est prolongeable par continuité en a , de prolongement dérivable en a , l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en a est $y = a_0 + a_1(x - a)$, le signe de a_k et la parité de k donnent, localement, au voisinage de a , les positions relatives de la tangente et de la courbe, des conditions pour avoir un extremum local.

→ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Tangentes et position, extremum local

Proposition - Exploitation graphique d'un DL en a

Si f admet en a un DL_k ($k \geq 2$) de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_k(x - a)^k + o((x - a)^k)$$

alors f est prolongeable par continuité en a , de prolongement dérivable en a , l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en a est $y = a_0 + a_1(x - a)$, le signe de a_k et la parité de k donnent, localement, au voisinage de a , les positions relatives de la tangente et de la courbe, des conditions pour avoir un extremum local.

Remarque « Seulement » un DL d'ordre 1.

→ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$. Quel est son domaine de définition ?

Montrer qu'elle se prolonge de manière continue et dérivable en 1. Donner l'équation de la tangente ainsi que les positions relatives de la tangente et de la courbe.

Préciser également le comportement de f aux autres bornes du domaine de définition.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Exploitation graphique d'un DL en ∞

Si f admet en ∞ un développement limité généralisé d'ordre k

($k \geq 1$) de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$

alors \mathcal{C}_f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, le signe de c et la parité de k donnent, localement, au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, les positions relatives de l'asymptote et de la courbe.

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Proposition - Exploitation graphique d'un DL en ∞

Si f admet en ∞ un développement limité généralisé d'ordre k

($k \geq 1$) de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$

alors \mathcal{C}_f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, le signe de c et la parité de k donnent, localement, au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, les positions relatives de l'asymptote et de la courbe.

Remarque « Seulement » un DL d'ordre 0.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Asymptotes et position

Proposition - Exploitation graphique d'un DL en ∞

Si f admet en ∞ un développement limité généralisé d'ordre k

$$(k \geq 1) \text{ de la forme } f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

alors \mathcal{C}_f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, le signe de c et la parité de k donnent, localement, au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, les positions relatives de l'asymptote et de la courbe.

Remarque « Seulement » un DL d'ordre 0.

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 1) \ln \frac{x-1}{x+1}$.

Quel est son domaine de définition ?

Montrer que \mathcal{C}_f admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation ainsi que la position relative par rapport à la courbe.

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes
2. Vocabulaire
3. Développements limités
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)
- ▶ Calculer des limites, des équivalents. . .

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)
- ▶ Calculer des limites, des équivalents. . .
- ▶ Position relative au voisinage d'un point (extremum...).

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)
- ▶ Calculer des limites, des équivalents. . .
- ▶ Position relative au voisinage d'un point (extremum...).
- ▶ Equation de la tangente ou de l'asymptote. Position relative.

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 24 : Espaces vectoriels
1. Problème & 2. Généralités
- ▶ Exercice n° 461 & 468

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction