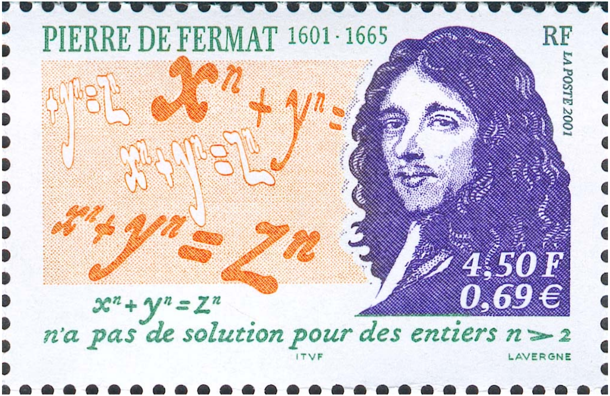


Leçon 64 - Groupes symétriques

7 & 11 février 2025

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

⇒ Parties génératrices de groupe

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

⇒ Parties génératrices de groupe

Problèmes

Problème - Un groupe fini non commutatif

Problèmes

Problème - Un groupe fini non commutatif

Problème - Recherche d'invariant

Problèmes

Problème - Un groupe fini non commutatif

Problème - Recherche d'invariant

Problème - Rubik's cube

Problèmes

Problème - Un groupe fini non commutatif

Problème - Recherche d'invariant

Problème - Rubik's cube

Problème - Groupe engendré. Base ? Codage...
$(\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}})$

Problèmes

Problème - Un groupe fini non commutatif

Problème - Recherche d'invariant

Problème - Rubik's cube

Problème - Groupe engendré. Base ? Codage...
$(\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}})$

Problème - Signature d'ordre 3 ?

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

⇒ Parties génératrices de groupe

Groupe symétrique

Soit $n \geqslant 2$.

Définition - Groupe symétrique

On note S_n (ou $\mathfrak{S}_n$) l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. $(S_n, \circ)$ est un groupe, non commutatif dès que $n > 2$, appelé groupe symétrique (d'ordre n).

Groupe symétrique

Soit $n \geqslant 2$.

Définition - Groupe symétrique

On note S_n (ou $\mathfrak{S}_n$) l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
$(S_n, \circ)$ est un groupe, non commutatif dès que $n > 2$, appelé groupe symétrique (d'ordre n).

On omet parfois $\circ$ dans les écritures et on écrit $\sigma \circ \sigma' = \sigma\sigma'$, on parle alors de « **produit** » plutôt que de composée.

Cardinal

Proposition - Cardinal

$\operatorname{Card} S_n = n!$

Cardinal

Proposition - Cardinal

$\mathrm{Card}\, S_n = n!$

Démonstration

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

⇒ Parties génératrices de groupe

Le codage classique

Savoir-faire. Notation classique

Pour $\sigma \in S_n$, on note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

On notera aussi plus efficacement (et classiquement) :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Inspiré par les commandes Python, on pourrait écrire : $\sigma[4] = \sigma(4)$ ou encore $\sigma[2:5]$.

Le codage matriciel

Proposition - Codage des permutations avec des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On note Σ_n, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n avec une seule 1 par ligne et par colonne.

L'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & S_n & \longrightarrow & \Sigma_n \\ & \sigma & \longmapsto & S \quad \text{telle que } \mathrm{Coef}_{i,j}(S) = [S]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} \end{array}$$

est un morphisme bijective de groupes

Le codage matriciel

Proposition - Codage des permutations avec des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On note Σ_n, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n avec une seule 1 par ligne et par colonne.

L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & S_n & \longrightarrow & \Sigma_n \\ & \sigma & \longmapsto & S \quad \text{telle que } \mathrm{Coef}_{i,j}(S) = [S]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} \end{array}$$

est un morphisme bijective de groupes

Exemple Matrice de $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Le codage matriciel

Proposition - Codage des permutations avec des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On note Σ_n, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n avec une seule 1 par ligne et par colonne.

L'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & S_n & \longrightarrow & \Sigma_n \\ & \sigma & \longmapsto & S \quad \text{telle que } \mathrm{Coef}_{i,j}(S) = [S]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} \end{array}$$

est un morphisme bijective de groupes

Démonstration

Le codage matriciel

Proposition - Codage des permutations avec des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On note Σ_n, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n avec une seule 1 par ligne et par colonne.

L'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & S_n & \longrightarrow & \Sigma_n \\ & \sigma & \longmapsto & S \quad \text{telle que } \mathrm{Coef}_{i,j}(S) = [S]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} \end{array}$$

est un morphisme bijective de groupes

Démonstration

Remarque Structure de groupe

Exercice

<u>Exercice</u>

Montrer que pour $S \in \Sigma_n$, S^{-1} s'obtient facilement à partir de S.
Que représente $\mathrm{Tr}(S)$?

Le codage par graphes

Savoir-faire. Permutation et graphe

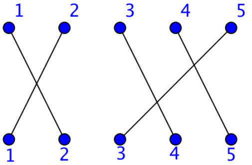
On écrit en ligne les éléments du départ (souvent en haut) et en bas, les (mêmes) éléments de l'arrivée en bas.
Puis on relie les éléments par des flèches.
Un graphe est celui d'une permutation ssi de chaque point du départ part une unique flèche et à chaque point de l'arrivée arrive une et une seule flèche.
Il s'agit du graphe de la matrice de permutation vue plus haut.

Le codage par graphes

Voir Représentation graphique d'une permutation

Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Sa représentation graphique est

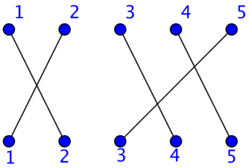


Le codage par graphes

Voir Représentation graphique d'une permutation

Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Sa représentation graphique est



L'avantage très nette de cette représentation : le produit (composition) de permutation consiste simplement à glisser les représentations l'une sous l'autre.

Nous verrons un autre avantage plus loin.

Exercice

<u>Exercice</u>

Faire la représentation graphique de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ si $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

En déduire la valeur de $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

⇒ Parties génératrices de groupe

Transpositions

Deux permutations particulières : la transposition et le cycle.

Transpositions

Définition - Transposition

Soit $(a,b) \in [\![1,n]\!]^2$, $a \neq b$. La permutation $\tau_{a,b}$ définie par

$$\tau_{a,b}(a) = b,\ \tau_{a,b}(b) = a, \qquad \forall x \in [\![1,n]\!] \setminus \{a,b\},\ \tau_{a,b}(x) = x$$

s'appelle la transposition de a et b.

Transpositions

Défnition - Transposition

Soit $(a,b) \in [\![1,n]\!]^2$, $a \neq b$. La permutation $\tau_{a,b}$ définie par

$$\tau_{a,b}(a) = b,\, \tau_{a,b}(b) = a, \qquad \forall x \in [\![1,n]\!] \setminus \{a,b\},\ \tau_{a,b}(x) = x$$

s'appelle la transposition de a et b.

Remarque Involution

TransposITIONS (exercice)

Remarque Transposition

Transpositions (exercice)

Remarque Transposition

Exercice

Combien de transpositions de S_n existe-t-il ?

Cycles

Définition - Cycle

Soient $a_1, \ldots, a_p$ $(p \leqslant n)$ des éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
La permutation σ telle que

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \sigma(a_{p-1)} = a_p, \sigma(a_p) = a_1$$

$$\text{et } \forall x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}, \sigma(x) = x$$

s'appelle un cycle de longueur p ou p-cycle, on le note $(a_1 a_2 \ldots a_p)$.
L'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ s'appelle le support du cycle.
Deux cycles sont dits disjoints si leurs supports sont disjoints.

Cycles

Définition - Cycle

Soient $a_1, \ldots, a_p$ ($p \leqslant n$) des éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
La permutation σ telle que

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \sigma(a_{p-1)} = a_p, \sigma(a_p) = a_1$$

$$\text{et } \forall x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}, \sigma(x) = x$$

s'appelle un cycle de longueur p ou p-cycle, on le note $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_p)$.
L'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ s'appelle le support du cycle.
Deux cycles sont dits disjoints si leurs supports sont disjoints.

Remarque 2-cycle

Cycles

Définition - Cycle

Soient $a_1,\dots,a_p$ ($p \leqslant n$) des éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.
La permutation σ telle que

$$\sigma(a_1)=a_2,\, \sigma(a_2)=a_3,\dots,\sigma(a_{p-1})=a_p,\, \sigma(a_p)=a_1$$

$$\text{et } \forall x \notin \{a_1,a_2,\dots,a_p\},\, \sigma(x)=x$$

s'appelle un cycle de longueur p ou p-cycle, on le note $(a_1\, a_2\, \dots\, a_p)$.
L'ensemble $\{a_1,a_2,\dots,a_p\}$ s'appelle le support du cycle.
Deux cycles sont dits disjoints si leurs supports sont disjoints.

Remarque 2-cycle

Remarque Permutation circulaire de S_n

Cycles (Analyse)

Analyse Quelle différence entre $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 1)$ de S_5 ?

Cycles (Analyse)

Analyse Quelle différence entre $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 1)$ de S_5 ?
Analyse Image réciproque d'une permutation réciproque

Exemples et exercice

Comment décomposer en produit de cycles ? Plus tard avec les orbites…

Exemples et exercice

Comment décomposer en produit de cycles ? Plus tard avec les orbites. . .

Exemples Quelques cycles

Exemples et exercice

Comment décomposer en produit de cycles ? Plus tard avec les orbites. . .

Exemples Quelques cycles

Exercice

Déterminer les bijections réciproques des bijections précédentes.

Exemples et exercice

Comment décomposer en produit de cycles ? Plus tard avec les orbites. . .

Exemples Quelques cycles

Exercice

Déterminer les bijections réciproques des bijections précédentes.

Exercice

Combien de cycle de longueur k de S_n existe-t-il ?

Commutation

Les exemples permettent d'affirmer :

Proposition - Commutation

Deux cycles (à supports) disjoints commutent.

Commutation

Les exemples permettent d'affirmer :

Proposition - Commutation

Deux cycles (à supports) disjoints commutent.

Démonstration

Commutation

Les exemples permettent d'affirmer :

Proposition - Commutation

Deux cycles (à supports) disjoints commutent.

Démonstration

Exercice

Ecrire les ensembles S_2 et S_3. Donner une permutation de S_4 qui ne soit pas un cycle.

Classe de conjugaison

Proposition - Classe de conjugaison

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $c = (a_1 \dots a_k)$ un cycle.
Alors $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $\big(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k)\big)$.

Classe de conjugaison

Proposition - Classe de conjugaison

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $c = (a_1 \ldots a_k)$ un cycle.
Alors $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $\big(\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_k)\big)$.

Démonstration

Classe de conjugaison

Proposition - Classe de conjugaison

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $c = (a_1 \dots a_k)$ un cycle.
Alors $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $\big(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k)\big)$.

Démonstration

Remarque Nom arbitraire

Ordre d'un élément dans un groupe

Analyse Ordre d'un élément.

Ordre d'un élément dans un groupe

Analyse Ordre d'un élément.

Définition - Ordre d'un élément / ordre d'une permutation

Soit σ une permutation de E et $x \in E$.
On appelle ordre de x (pour σ), le nombre
$k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^i(x) = x\}$.
On appelle ordre de σ, le nombre
$k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \forall\ x \in E, \sigma^i(x) = x\}$.

Ordre d'un élément dans un groupe

Analyse Ordre d'un élément.

Définition - Ordre d'un élément / ordre d'une permutation

Soit σ une permutation de E et $x \in E$.
On appelle ordre de x (pour σ), le nombre
$k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^i(x) = x\}$.
On appelle ordre de σ, le nombre
$k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \forall\ x \in E, \sigma^i(x) = x\}$.

Exercice

Montrer que l'ordre de σ est le ppcm des ordres de tous les x de E.

Ordre d'une permutation

Proposition - Ordre d'un cycle

Si c est un cycle de longueur p, alors $c^p = \mathrm{id}$.
Mieux : p est l'ordre du cycle

Ordre d'une permutation

Proposition - Ordre d'un cycle

Si c est un cycle de longueur p, alors $c^p = \mathrm{id}$.
Mieux : p est l'ordre du cycle

Démonstration

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

⇒ Parties génératrices de groupe

Sous-groupe engendré par une partie

Nous rappelons du vocabulaire valable pour toute la théorie des groupes.

Sous-groupe engendré par une partie

Nous rappelons du vocabulaire valable pour toute la théorie des groupes.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \star)$ un groupe et S, une partie de G.
On appelle sous-groupe de G, engendré par S, le plus petit sous-groupe de G (au sens de l'inclusion) qui contient S.
On le note $< S >$.
On a donc la caractéristique suivante :

$$< S > < G \text{ et } (S \subset H, H < G) \Rightarrow < S > \subset H$$

Description explicite

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une description explicite.

Description explicite

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une description explicite.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \star)$ un groupe et S, une partie de G.

$$< S >= \{x_1^{\epsilon_1} \star \ldots x_n^{\epsilon_n} ; n \in \mathbb{N}, \forall\ i \in \mathbb{N}_n, x_i \in S, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

Description explicite

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une description explicite.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \star)$ un groupe et S, une partie de G.

$$< S >= \{x_1^{\epsilon_1} \star \dots x_n^{\epsilon_n} ; n \in \mathbb{N}, \forall\ i \in \mathbb{N}_n, x_i \in S, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

Démonstration

Description explicite

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une description explicite.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \star)$ un groupe et S, une partie de G.

$$< S >= \{x_1^{\epsilon_1} \star \dots x_n^{\epsilon_n}; n \in \mathbb{N}, \forall\ i \in \mathbb{N}_n, x_i \in S, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

Démonstration

Exercice :

Dans $G = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, avec la loi $\overline{+}$, montrer que $< r >= G \iff r \wedge n = 1$

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

⇒ Parties génératrices de groupe

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

Si les cycles ne sont pas à supports disjoints :

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples
Si les cycles ne sont pas à supports disjoints :

Proposition - Pseudo-Chasles

Soient $a_i, a_j a_k$ distincts.
Alors $(a_j\, a_i) \circ (a_i\, a_k) = (a_j\, a_i\, a_k)$

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

Si les cycles ne sont pas à supports disjoints :

Proposition - Pseudo-Chasles

Soient $a_i, a_j a_k$ distincts.

Alors $(a_j\, a_i) \circ (a_i\, a_k) = (a_j\, a_i\, a_k)$

Démonstration

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

Si les cycles ne sont pas à supports disjoints :

Proposition - Pseudo-Chasles

Soient $a_i, a_j a_k$ distincts.

Alors $(a_j\, a_i) \circ (a_i\, a_k) = (a_j\, a_i\, a_k)$

Démonstration

Plus largement :

Exercice : Montrer que $(a_1\, a_2\, a_3) \circ (a_3\, a_4\, a_1) = (a_2\, a_3\, a_4)$

Orbite

Définition - Orbite de x

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$.
La relation définie sur $[\![1,n]\!]$ par

$$x\mathscr{R}_\sigma y \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, y=\sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence.
Pour $x\in[\![1,n]\!]$, il existe un unique $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $x,\sigma(x),\dots,\sigma^{p-1}(x)$ soient deux à deux distincts et $\sigma^p(x)=x$.
La classe d'équivalence de x pour la relation $\mathscr{R}_\sigma$ est alors l'ensemble $\{x,\sigma(x),\dots,\sigma^{p-1}(x)\}$, appelé **orbite** de x.

Orbite

Définition - Orbite de x

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$.
La relation définie sur $[\![1,n]\!]$ par

$$x\mathscr{R}_\sigma y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence.
Pour $x \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)$ soient deux à deux distincts et $\sigma^p(x) = x$.
La classe d'équivalence de x pour la relation $\mathscr{R}_\sigma$ est alors l'ensemble $\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$, appelé **orbite** de x.

Démonstration

Orbite

Définition - Orbite de x

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$.
La relation définie sur $[\![1,n]\!]$ par

$$x\mathscr{R}_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence.
Pour $x \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)$ soient deux à deux distincts et $\sigma^p(x) = x$.
La classe d'équivalence de x pour la relation $\mathscr{R}_\sigma$ est alors l'ensemble $\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)\}$, appelé **orbite** de x.

Démonstration

Exercice

Montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence

Décomposition en produit de cycles

Théorème - Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation autre que l'identité se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.
Plus précisément, ces cycles sont entièrement déterminés par σ : leur nombre est égal au nombre d'orbites non réduites à un élément de σ et ils sont égaux aux restrictions de σ à chacune des orbites.

Décomposition en produit de cycles

Théorème - Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation autre que l'identité se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.
Plus précisément, ces cycles sont entièrement déterminés par σ : leur nombre est égal au nombre d'orbites non réduites à un élément de σ et ils sont égaux aux restrictions de σ à chacune des orbites.

Démonstration

Cycles (Savoir-faire)

Savoir-faire. Comment décrire une permutation en produit de cycles

On suppose que la permutations sous la forme d'une liste double.

On peut imaginer que $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \dots \end{pmatrix}$

On procède, en plusieurs temps, en suivant les chemins ....

- On est choisit librement premier élément du cycle : il ne doit pas être un point fixe.
  On le note k $\Longrightarrow (k, \qquad)$
- On se dirige alors en s_k. $\Longrightarrow$ $(k, s_k \qquad)$
- On se dirige ensuite en $s(s_k)$. $\Longrightarrow$ $(k, s_k, s(s_k) \qquad)$
- ...
- On continue ainsi jusqu'à trouver à nouveau k.

Cycles (Savoir-faire)

Savoir-faire. Comment décrire une permutation en produit de cycles

On suppose que la permutations sous la forme d'une liste double.

On peut imaginer que $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \dots \end{pmatrix}$

On procède, en plusieurs temps, en suivant les chemins ...

Si la permutation considérée est un cycle, l'écriture est terminée.

Sinon, on continue avec les nombres qui n'était pas dans le 1er cycle.

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui possède exactement un 1 par ligne et par colonne et que des zéros sinon.

Montrer qu'il existe k tel que $A^k = I_n$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

- Une bijection d'un ensemble X sur lui-même...

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

- Une bijection d'un ensemble X sur lui-même...
- Représentation de Cauchy : en double liste

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

- Une bijection d'un ensemble X sur lui-même...
- Représentation de Cauchy : en double liste
- Représentation matriciel : un 1 par ligne et par colonne. L'inverse est la transposée...

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

- Une bijection d'un ensemble X sur lui-même...
- Représentation de Cauchy : en double liste
- Représentation matriciel : un 1 par ligne et par colonne.
  L'inverse est la transposée...
- Représentation fléchée.
  TB pour la composition (et la signature...)

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

- Transpositions : inversion de deux éléments, les autres sont invariants

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

- Transpositions : inversion de deux éléments, les autres sont invariants
- Cycle : permutation circulaire d'une famille de termes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

$\Rightarrow$ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

- Transpositions : inversion de deux éléments, les autres sont invariants
- Cycle : permutation circulaire d'une famille de termes
- Ordre d'un cycle : sa longueur.

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce qu'une permutation, comment la définir ?

⇒ Deux permutations particulières : transpositions et cycles

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 26 : Groupes symétriques
  3. Décomposition d'une permutation
  4. Signature
- Exercice n°600, 604 & 605
- TD : 602, 603, 606, 607, 608, 609, 610 (les deux groupes)
- Vendredi : Activité