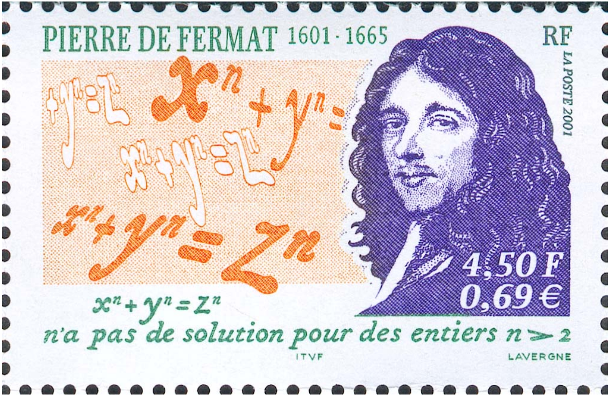

Leçon 64 - Groupes symétriques

7 & 11 février 2025

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

1. Problèmes

2. Définitions

2.3. Des permutations particulières

3. Décomposition d'une permutation

3.1. Partie génératrice d'un groupe

3.2. Décomposition en produit de cycles

3.3.Décomposition en produit de transpositions

4. Signature d'une permutation

4.1. Motivation : nombre d'inversions

4.2. Propriété caractéristique

4.3. Autres façons d'obtenir la signature de σ

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Transpositions

Défnition - Transposition

Soit $(a,b) \in [\![1,n]\!]^2$, $a \neq b$. La permutation $\tau_{a,b}$ définie par

$$\tau_{a,b}(a) = b,\ \tau_{a,b}(b) = a, \qquad \forall x \in [\![1,n]\!] \setminus \{a,b\},\ \tau_{a,b}(x) = x$$

s'appelle la transposition de a et b.

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Cycles

Définition - Cycle

Soient $a_1,\ldots,a_p$ ($p \leqslant n$) des éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.
La permutation σ telle que

$$\sigma(a_1)=a_2, \sigma(a_2)=a_3,\ldots,\sigma(a_{p-1})=a_p, \sigma(a_p)=a_1$$

$$\text{et } \forall x \notin \{a_1,a_2,\ldots,a_p\}, \sigma(x)=x$$

s'appelle un cycle de longueur p ou p-cycle, on le note $(a_1 a_2 \ldots a_p)$.
L'ensemble $\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$ s'appelle le support du cycle.
Deux cycles sont dits disjoints si leurs supports sont disjoints.

Classe de conjugaison

Proposition - Classe de conjugaison

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $c = (a_1 \dots a_k)$ un cycle.
Alors $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $\big(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k)\big)$.

Classe de conjugaison

Proposition - Classe de conjugaison

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $c = (a_1 \ldots a_k)$ un cycle.
Alors $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $\big(\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_k)\big)$.

Démonstration

Classe de conjugaison

Proposition - Classe de conjugaison

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $c = (a_1 \dots a_k)$ un cycle.
Alors $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $\big(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k)\big)$.

Démonstration

Remarque Nom arbitraire

Ordre d’un élément dans un groupe

Analyse Ordre d’un élément.

Ordre d'un élément dans un groupe

Analyse Ordre d'un élément.

Définition - Ordre d'un élément / ordre d'une permutation

Soit σ une permutation de E et $x \in E$.
On appelle ordre de x (pour σ), le nombre
$k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^i(x) = x\}$.
On appelle ordre de σ, le nombre
$k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \forall\ x \in E, \sigma^i(x) = x\}$.

Ordre d'un élément dans un groupe

Analyse Ordre d'un élément.

Définition - Ordre d'un élément / ordre d'une permutation

Soit σ une permutation de E et $x \in E$.
On appelle ordre de x (pour σ), le nombre
$k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^i(x) = x\}$.
On appelle ordre de σ, le nombre
$k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \forall\ x \in E, \sigma^i(x) = x\}$.

Exercice

Montrer que l'ordre de σ est le ppcm des ordres de tous les x de E.

Ordre d'une permutation

Proposition - Ordre d'un cycle

Si c est un cycle de longueur p, alors $c^p = \mathrm{id}$.
Mieux : p est l'ordre du cycle

Ordre d’une permutation

Proposition - Ordre d’un cycle

Si c est un cycle de longueur p, alors $c^p = \mathrm{id}$.
Mieux : p est l’ordre du cycle

Démonstration

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Sous-groupe engendré par une partie

Nous rappelons du vocabulaire valable pour toute la théorie des groupes.

Sous-groupe engendré par une partie

Nous rappelons du vocabulaire valable pour toute la théorie des groupes.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \star)$ un groupe et S, une partie de G.
On appelle sous-groupe de G, engendré par S, le plus petit sous-groupe de G (au sens de l'inclusion) qui contient S.
On le note $< S >$.
On a donc la caractéristique suivante :

$$< S > < G \text{ et } (S \subset H, H < G) \Rightarrow < S > \subset H$$

Description explicite

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une description explicite.

Description explicite

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une description explicite.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \star)$ un groupe et S, une partie de G.

$$< S >= \{x_1^{\epsilon_1} \star \dots x_n^{\epsilon_n} ; n \in \mathbb{N}, \forall\ i \in \mathbb{N}_n, x_i \in S, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

Description explicite

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une description explicite.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \star)$ un groupe et S, une partie de G.

$$< S > = \{x_1^{\epsilon_1} \star \dots x_n^{\epsilon_n} ; n \in \mathbb{N}, \forall\ i \in \mathbb{N}_n, x_i \in S, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

Démonstration

Description explicite

Comme pour les espaces vectoriels, on dispose d'une description explicite.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \star)$ un groupe et S, une partie de G.

$$< S >= \{x_1^{\epsilon_1} \star \dots x_n^{\epsilon_n} ; n \in \mathbb{N}, \forall\ i \in \mathbb{N}_n, x_i \in S, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

Démonstration

Exercice :

Dans $G = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, avec la loi $\overline{+}$, montrer que $< r >= G \iff r \wedge n = 1$

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

Si les cycles ne sont pas à supports disjoints :

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

Si les cycles ne sont pas à supports disjoints :

Proposition - Pseudo-Chasles

Soient $a_i, a_j a_k$ distincts.

Alors $(a_j\ a_i) \circ (a_i\ a_k) = (a_j\ a_i\ a_k)$

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

Si les cycles ne sont pas à supports disjoints :

Proposition - Pseudo-Chasles

Soient $a_i, a_j a_k$ distincts.

Alors $(a_j\, a_i) \circ (a_i\, a_k) = (a_j\, a_i\, a_k)$

Démonstration

« Chasles »

Analyse - Quelques exemples

Si les cycles ne sont pas à supports disjoints :

Proposition - Pseudo-Chasles

Soient $a_i, a_j a_k$ distincts.

Alors $(a_j\, a_i) \circ (a_i\, a_k) = (a_j\, a_i\, a_k)$

Démonstration

Plus largement :

Exercice : Montrer que $(a_1\, a_2\, a_3) \circ (a_3\, a_4\, a_1) = (a_2\, a_3\, a_4)$

Orbite

Définition - Orbite de x

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$.
La relation définie sur $[\![1,n]\!]$ par

$$x\mathscr{R}_\sigma y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence.
Pour $x \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)$ soient deux à deux distincts et $\sigma^p(x) = x$.
La classe d'équivalence de x pour la relation $\mathscr{R}_\sigma$ est alors l'ensemble $\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$, appelé **orbite** de x.

Orbite

Définition - Orbite de x

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$.
La relation définie sur $[\![1,n]\!]$ par

$$x\mathscr{R}_\sigma y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence.
Pour $x \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)$ soient deux à deux distincts et $\sigma^p(x) = x$.
La classe d'équivalence de x pour la relation $\mathscr{R}_\sigma$ est alors l'ensemble $\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)\}$, appelé **orbite** de x.

Démonstration

Orbite

Définition - Orbite de x

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$.
La relation définie sur $[\![1,n]\!]$ par

$$x\mathscr{R}_\sigma y \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, y=\sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence.
Pour $x\in[\![1,n]\!]$, il existe un unique $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $x,\sigma(x),\dots,\sigma^{p-1}(x)$ soient deux à deux distincts et $\sigma^p(x)=x$.
La classe d'équivalence de x pour la relation $\mathscr{R}_\sigma$ est alors l'ensemble $\{x,\sigma(x),\dots,\sigma^{p-1}(x)\}$, appelé **orbite** de x.

Démonstration

Exercice

Montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence

Décomposition en produit de cycles

Théorème - Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation autre que l'identité se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.
Plus précisément, ces cycles sont entièrement déterminés par σ : leur nombre est égal au nombre d'orbites non réduites à un élément de σ et ils sont égaux aux restrictions de σ à chacune des orbites.

Décomposition en produit de cycles

Théorème - Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation autre que l'identité se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.
Plus précisément, ces cycles sont entièrement déterminés par σ : leur nombre est égal au nombre d'orbites non réduites à un élément de σ et ils sont égaux aux restrictions de σ à chacune des orbites.

Démonstration

Cycles (Savoir-faire)

Savoir-faire. Comment décrire une permutation en produit de cycles

On suppose que la permutations sous la forme d'une liste double.

On peut imaginer que $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \dots \end{pmatrix}$

On procède, en plusieurs temps, en suivant les chemins ....

- On est choisit librement premier élément du cycle : il ne doit pas être un point fixe.
  On le note k $\Longrightarrow (k, \qquad)$
- On se dirige alors en s_k. $\Longrightarrow$ $(k, s_k \qquad)$
- On se dirige ensuite en $s(s_k)$. $\Longrightarrow$ $(k, s_k, s(s_k) \qquad)$
- ...
- On continue ainsi jusqu'à trouver à nouveau k.

Cycles (Savoir-faire)

Savoir-faire. Comment décrire une permutation en produit de cycles

On suppose que la permutations sous la forme d'une liste double.

On peut imaginer que $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \dots \end{pmatrix}$

On procède, en plusieurs temps, en suivant les chemins ...

Si la permutation considérée est un cycle, l'écriture est terminée.

Sinon, on continue avec les nombres qui n'était pas dans le 1er cycle.

Exercices

Exercice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui possède exactement un 1 par ligne et par colonne et que des zéros sinon.
Montrer qu'il existe k tel que $A^k = I_n$.

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Transpositions quelconques

On commence par une proposition :

Proposition - Décomposition

Un p-cycle est un produit (i.e. une composée) de $p-1$ transpositions :

$$(a_1 a_2 \dots a_p) = (a_1 a_2)(a_2 a_3)\dots(a_{p-1} a_p)$$

Transpositions quelconques

On commence par une proposition :

Proposition - Décomposition

Un p-cycle est un produit (i.e. une composée) de $p-1$ transpositions :

$$(a_1 a_2 \dots a_p) = (a_1 a_2)(a_2 a_3)\dots(a_{p-1} a_p)$$

Démonstration

Décomposition d'une permutation

On en déduit, associé avec la partie précédente

Théorème - Engendrement par transpositions

Toute permutation se décompose en produit de transpositions.
Autrement écrit, si on note T_n l'ensemble des transpositions de S_n,

alors $S_n = \langle T_n \rangle$

Décomposition d'une permutation

On en déduit, associé avec la partie précédente

Théorème - Engendrement par transpositions

Toute permutation se décompose en produit de transpositions. Autrement écrit, si on note T_n l'ensemble des transpositions de S_n,

alors $S_n = < T_n >$

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Décomposition d'une permutation

On en déduit, associé avec la partie précédente

Théorème - Engendrement par transpositions

Toute permutation se décompose en produit de transpositions. Autrement écrit, si on note T_n l'ensemble des transpositions de S_n,

alors $S_n = < T_n >$

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice

Déterminer la permutation $(a_1 a_p) \circ (a_1 a_{p-1}) \circ \cdots \circ (a_1 a_2)$ où les a_i sont des entiers tous distincts compris entre 1 et n, ainsi que la permutation $(a_1 a_2 \dots a_q) \circ (a_q a_{q+1} \dots a_p)$ où $1 < q < p$.

Exercices

Exercice

Soit $\tau = (a\,b) \in S_n$ et $\sigma = (a\,a_1 a_2 \dots a_p) \in S_n$ un cycle de longueur $p+1$. Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de $\tau\sigma$. Comparer le nombre d'orbites de σ et celui de $\tau\sigma$.

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $\tau = (a\,b) \in S_n$ et $\sigma = (a\,a_1\,a_2\,\ldots a_p) \in S_n$ un cycle de longueur $p+1$. Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de $\tau\sigma$. Comparer le nombre d'orbites de σ et celui de $\tau\sigma$.

<u>Exercice</u>

Pour $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, calculer $\tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i}$ et montrer que les transpositions de la forme τ_{1i} engendrent le groupe symétrique S_n (c'est-à-dire que toute permutation se décompose comme produit de transpositions de la forme τ_{1i}).

Transposition $\tau_{i,i+1}$

Analyse Un deuxième algorithme ?

Transposition $\tau_{i,i+1}$

Analyse Un deuxième algorithme ?

Exercice

Appliquer la méthode présentée pour exprimer à nouveau $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ en produit de transpositions.

Décomposition avec des transposition $(i\; i+1)$

Proposition - Décomposition par transposition simple

Toute permutation est le produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$.
Autrement écrit :
Pour tout $\sigma \in S_n$, il existe $r \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots i_r \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\sigma = \tau_{i_1,i_1+1} \circ \cdots \circ \tau_{i_r,i_r+1}$.

Décomposition avec des transposition $(i\; i+1)$

Proposition - Décomposition par transposition simple

Toute permutation est le produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$.
Autrement écrit :
Pour tout $\sigma \in S_n$, il existe $r \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots i_r \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\sigma = \tau_{i_1,i_1+1} \circ \cdots \circ \tau_{i_r,i_r+1}$.

Exercice

A démontrer

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Parité

Heuristique. Parité de changements

Il arrive, très souvent, qu'on s'intéresse au nombre de changement d'ordre dans une permutation.
On avait un ensemble bien ordonné $(1\,2\,\ldots\,n)$ et en bout de course, il se trouve tout mélangé.
Combien de changement a-t-il fallut faire ? Ce nombre ne peut pas être fixe, car deux transpositions identiques conduisent à la situation initiale. Donc le seul nombre auquel on peut avoir accès est la parité de ce nombre de changements.

Définition de signature (1)

Définition - Une première définition

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$,
on appelle signature de σ, le nombre

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \mathrm{signe}\big(\sigma(i) - \sigma(j)\big)$$

Définition de signature (1)

Définition - Une première définition

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$,
on appelle signature de σ, le nombre

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \operatorname{signe}\big(\sigma(i) - \sigma(j)\big)$$

Exemple Signature de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Sans la fonction signe. Simplification

Analyse Calcul pour savoir si $i < j$.

Sans la fonction signe. Simplification

Analyse Calcul pour savoir si $i < j$.

Proposition - Formule (sans la fonction signe)

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$.

Alors $\epsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\{i,j\} \in \binom{\mathbb{N}_n}{2}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

Sans la fonction signe. Simplification

Analyse Calcul pour savoir si $i < j$.

Proposition - Formule (sans la fonction signe)

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$.

Alors $$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\{i,j\} \in \binom{\mathbb{N}_n}{2}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Démonstration

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1,1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Corollaire - Morphisme de groupes

ϵ est donc un morphisme de groupes, du groupe $(S_n, \circ)$ dans le groupe $(\{-1,1\}, \times)$.

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Corollaire - Morphisme de groupes

ϵ est donc un morphisme de groupes, du groupe $(S_n, \circ)$ dans le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$.

Démonstration du corollaire

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1,1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1,1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Démonstration

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Avec les transpositions

On exploite le morphisme de groupe :

Corollaire - Calcul de $\epsilon(\sigma)$

Soit $\sigma \in S_n$, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ une décomposition en transpositions. Alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^k$ (en particulier la parité de k est déterminée par σ).

Avec les transpositions

On exploite le morphisme de groupe :

Corollaire - Calcul de $\epsilon(\sigma)$

Soit $\sigma \in S_n$, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ une décomposition en transpositions. Alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^k$ (en particulier la parité de k est déterminée par σ).

Exemple $\epsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\right)$

Avec les orbites

Cela découle de la démonstration.

Corollaire - Signature et décomposition de cycles

Soient $c_1, \ldots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \ldots, \ell_p$. Alors la permutation $\sigma = c_1 c_2 \ldots c_p$ a pour signature

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)}.$$

Avec les orbites

Cela découle de la démonstration.

Corollaire - Signature et décomposition de cycles

Soient $c_1, \ldots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \ldots, \ell_p$. Alors la permutation $\sigma = c_1 c_2 \ldots c_p$ a pour signature

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)}.$$

Démonstration

Avec les orbites

Cela découle de la démonstration.

Corollaire - Signature et décomposition de cycles

Soient $c_1, \dots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \dots, \ell_p$. Alors la permutation $\sigma = c_1 c_2 \dots c_p$ a pour signature

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)}.$$

Démonstration

Attention - Le nombre de cycle p

Il faut compter les points fixes parmi les cycles (au nombre de p) qui décompose σ dans la formule $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$

Avec les orbites

Cela découle de la démonstration.

Corollaire - Signature et décomposition de cycles

Soient $c_1, \ldots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \ldots, \ell_p$. Alors la permutation $\sigma = c_1 c_2 \ldots c_p$ a pour signature

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)}.$$

Démonstration

Attention - Le nombre de cycle p

Il faut compter les points fixes parmi les cycles (au nombre de p) qui décompose σ dans la formule $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$

Exemple $\epsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\right)$, avec les orbites

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints
  Comment l'obtenir ? L'algorithme des orbites.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints
  Comment l'obtenir ? L'algorithme des orbites.
- Toute permutation est un produit de transpositions

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints
  Comment l'obtenir ? L'algorithme des orbites.
- Toute permutation est un produit de transpositions
  Comment l'obtenir ? Décomposition des orbites, ou avec la vision graphe

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints
  Comment l'obtenir ? L'algorithme des orbites.
- Toute permutation est un produit de transpositions
  Comment l'obtenir ? Décomposition des orbites, ou avec la vision graphe
- Toute permutation est un produit de transpositions $\tau_{i,i+1}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)
- Premier moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)
- Premier moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
- Deuxième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$, si σ se décompose en p transpositions.

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)
- Premier moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
- Deuxième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$, si σ se décompose en p transpositions.
- Troisième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$, si σ se décompose produit de k cycles disjoints.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)
- Premier moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
- Deuxième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$, si σ se décompose en p transpositions.
- Troisième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$, si σ se décompose produit de k cycles disjoints.
- Quatrième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^N$, si le graphe de σ présente N croisements.

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 24 : Espaces vectoriels
- Exercice n° 611

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature