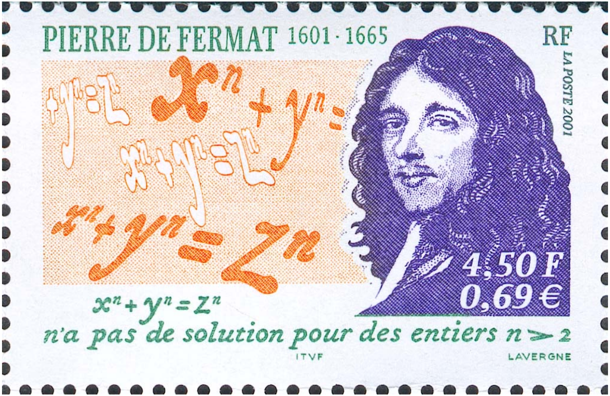

Leçon 67 - Espace vectoriel

4 mars 2025

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

Problèmes

Problème Structure de la géométrie vectorielle

Problèmes

Problème Structure de la géométrie vectorielle

Problème Sous-espaces vectoriels
$F \cap G, F \cup G$?

Problèmes

Problème Structure de la géométrie vectorielle

Problème Sous-espaces vectoriels
$F \cap G$, $F \cup G$?

Problème Anneau des sous-espaces vectoriels

Problèmes

Problème Applications qui conservent la structure

Problèmes

Problème Applications qui conservent la structure

Problème Projection

$\Rightarrow$ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

$\Rightarrow$ Nombreux exemples

Loi de composition externe

Définition - Loi de composition externe

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **loi de composition externe sur** E **à** domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E (on la note généralement par un point) :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{K} \times E & \to E \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda \cdot x \end{array}$$

Espace vectoriel : définition

Définition - Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** (notation $\mathbb{K}$-e.v.) ou **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ tout triplet $(E,+,\cdot)$ formé d'un ensemble E, d'une loi interne $+$ sur E et d'une loi externe $\cdot$ sur E à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ tel que :

- $(E,+)$ est un groupe commutatif
- Et on a les quatre propriétés suivantes :

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\forall(x,y)\in E^2$,

$$\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x \qquad (\alpha+\beta)\cdot x=(\alpha\cdot x)+(\beta\cdot x)$$
$$\alpha\cdot(x+y)=(\alpha\cdot x)+(\alpha\cdot y) \qquad 1\cdot x=x.$$

Les éléments de E s'appellent des vecteurs.

Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.

L'élément neutre de $(E,+)$ s'appelle le vecteur nul, noté 0_E ou $\vec{0}_E$.

Espace vectoriel : définition

Définition - Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** (notation $\mathbb{K}$-e.v.) ou **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ tout triplet $(E,+,\cdot)$ formé d'un ensemble E, d'une loi interne $+$ sur E et d'une loi externe $\cdot$ sur E à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ tel que :

- $(E,+)$ est un groupe commutatif
- Et on a les quatre propriétés suivantes :

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\forall(x,y)\in E^2$,

$$\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x \qquad (\alpha+\beta)\cdot x=(\alpha\cdot x)+(\beta\cdot x)$$
$$\alpha\cdot(x+y)=(\alpha\cdot x)+(\alpha\cdot y) \qquad 1\cdot x=x.$$

Les éléments de E s'appellent des vecteurs.
Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.
L'élément neutre de $(E,+)$ s'appelle le vecteur nul, noté 0_E ou $\vec{0}_E$.

Remarque Corps $\mathbb{K}$

Premières propriétés

Propriété - Premières propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$0 \cdot x = 0_E$$
$$(-1) \cdot x = -x$$
$$\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$$
$$\lambda \cdot 0_E = 0_E$$
$$\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

Premières propriétés

Propriété - Premières propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$0 \cdot x = 0_E$$
$$(-1) \cdot x = -x$$
$$\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$$
$$\lambda \cdot 0_E = 0_E$$
$$\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

Démonstration

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

Espace des matrices

Proposition - Espace vectoriel des matrices

$(\mathscr{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espace des matrices

Proposition - Espace vectoriel des matrices

$(\mathscr{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Espace des matrices

Proposition - Espace vectoriel des matrices

$(\mathscr{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Proposition - Espace vectoriel des polynômes

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espace des matrices

Proposition - Espace vectoriel des matrices

$(\mathscr{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Proposition - Espace vectoriel des polynômes

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Espaces produits

Proposition - Espaces produits

Soient $E_1,\dots,E_n$ des $\mathbb{K}$-e.v. (avec le même corps $\mathbb{K}$). On définit sur $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ les lois $+$ et $\cdot$ par :

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1 \underset{E_1}{+} y_1, x_2 \underset{E_2}{+} y_2, \dots, x_n \underset{E_n}{+} y_n)$$

$$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n) = (\lambda \underset{E_1}{\cdot} x_1, \dots, \lambda \underset{E_n}{\cdot} x_n)$$

Alors $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., de vecteur nul $(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$.

Espaces produits

Proposition - Espaces produits

Soient $E_1,\dots,E_n$ des $\mathbb{K}$-e.v. (avec le même corps $\mathbb{K}$). On définit sur $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ les lois $+$ et $\cdot$ par :

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1 \underset{E_1}{+} y_1, x_2 \underset{E_2}{+} y_2,\dots,x_n \underset{E_n}{+} y_n)$$

$$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n) = (\lambda \underset{E_1}{\cdot} x_1,\dots,\lambda \underset{E_n}{\cdot} x_n)$$

Alors $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., de vecteur nul $(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$.

Remarque Application classique

Espaces produits

Proposition - Espaces produits

Soient $E_1,\dots,E_n$ des $\mathbb{K}$-e.v. (avec le même corps $\mathbb{K}$). On définit sur $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ les lois $+$ et $\cdot$ par :

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1 \underset{E_1}{+} y_1, x_2 \underset{E_2}{+} y_2, \dots, x_n \underset{E_n}{+} y_n)$$

$$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n) = (\lambda \underset{E_1}{\cdot} x_1,\dots,\lambda \underset{E_n}{\cdot} x_n)$$

Alors $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., de vecteur nul $(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$.

Remarque Application classique

Exercice

A démontrer

$\mathbb{K}^n$

$\mathbb{K}$ muni de la loi interne $+$ et de la loi $\times$ comme loi externe à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant un $\mathbb{K}$-e.v. on en déduit que

$\mathbb{K}^n$

$\mathbb{K}$ muni de la loi interne $+$ et de la loi $\times$ comme loi externe à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant un $\mathbb{K}$-e.v. on en déduit que

Corollaire - Exemple crucial !

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v de vecteur nul $(0, \ldots, 0)$: $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-e.v. et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-e.v.

$\mathbb{K}^n$

$\mathbb{K}$ muni de la loi interne $+$ et de la loi $\times$ comme loi externe à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant un $\mathbb{K}$-e.v. on en déduit que

Corollaire - Exemple crucial !

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v de vecteur nul $(0, \dots, 0)$: $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-e.v. et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-e.v.

Exercice

Montrer que $\mathbb{C}^n$ est également un $\mathbb{R}$-e.v.

Famille presque nulle

Définition - Famille presque nulle

On considère un ensemble E (par exemple un corps $\mathbb{K}$).
On dit qu'une famille $(y_i)_{i\in E}$ d'éléments de E est presque nulle, si $\{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ est fini.
On note alors $E^{(I)}$, cet ensemble.
Alors $(E^{(I)}, +, \cdot)$ est un espace vetoriel.

Famille presque nulle

Définition - Famille presque nulle

On considère un ensemble E (par exemple un corps $\mathbb{K}$).
On dit qu'une famille $(y_i)_{i\in E}$ d'éléments de E est presque nulle, si $\{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ est fini.
On note alors $E^{(I)}$, cet ensemble.
Alors $(E^{(I)}, +, \cdot)$ est un espace vetoriel.

Exercice

On a $(y_i) + (z_i) = (y_i + z_i)$. Démontrer la proposition précédente.

Famille presque nulle

Définition - Famille presque nulle

On considère un ensemble E (par exemple un corps $\mathbb{K}$).
On dit qu'une famille $(y_i)_{i\in E}$ d'éléments de E est presque nulle, si $\{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ est fini.
On note alors $E^{(I)}$, cet ensemble.
Alors $(E^{(I)}, +, \cdot)$ est un espace vetoriel.

Exercice

On a $(y_i) + (z_i) = (y_i + z_i)$. Démontrer la proposition précédente.

Exemple $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

Cas plus généraux

Proposition - Espaces de fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathscr{F}(X,E)$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$f+g: \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto f(x) \underset{E}{+} g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot f: \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto \lambda \underset{E}{\cdot} f(x) \end{array}$$

Alors : $(\mathscr{F}(X,E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (pour E $\mathbb{K}$-e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

Cas plus généraux

Proposition - Espaces de fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathscr{F}(X,E)$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$f+g:\ \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto f(x) \underset{E}{+} g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \lambda\cdot f:\ \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto \lambda \underset{E}{\cdot} f(x) \end{array}$$

Alors : $(\mathscr{F}(X,E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (pour E $\mathbb{K}$-e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

Démonstration

Cas plus généraux

Proposition - Espaces de fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathscr{F}(X,E)$ des lois + et · définies par :

$$f+g:\quad \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto f(x) \underset{E}{+} g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \lambda\cdot f:\quad \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto \lambda \underset{E}{\cdot} f(x) \end{array}$$

Alors : $(\mathscr{F}(X,E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (pour E $\mathbb{K}$-e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

Démonstration

Analyse Cas particuliers

Cas plus généraux

Proposition - Espaces de fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathscr{F}(X,E)$ des lois + et · définies par :

$$f+g:\quad \begin{array}{l} X\to E \\ x\mapsto f(x)\underset{E}{+}g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \lambda\cdot f:\quad \begin{array}{l} X\to E \\ x\mapsto \lambda\underset{E}{\cdot}f(x) \end{array}$$

Alors : $(\mathscr{F}(X,E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (pour E $\mathbb{K}$-e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

Démonstration

Analyse Cas particuliers

Corollaire - Exemples multiples

$\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ (I intervalle de $\mathbb{R}$), $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Combinaison linéaire

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n$$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Combinaison linéaire

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n$$

Proposition - Stabilité linéaire

Si x et y sont combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.
Plus généralement, toute combinaison linéaire de vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Combinaison linéaire

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n$$

Proposition - Stabilité linéaire

Si x et y sont combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.
Plus généralement, toute combinaison linéaire de vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

Démonstration

Généralisation

Définition - Généralisation : combinaison linéaire de famille

Soit I un ensemble infini et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ s'il est combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'éléments de cette famille.
Ce qui peut aussi s'écrire : il existe une famille presque nulle (ou à support compact) $(\lambda_i)_{i\in I}$(c'est-à-dire comportant seulement un nombre fini de λ_i non nuls) telle que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$.
Ou encore, il existe $J \subset I$, fini, et $(\lambda_i)_{i\in J}$ tel que $x = \sum\limits_{j\in J} \lambda_j x_j$

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Sous-espace vectoriel

Soit F une partie non vide de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E
si F est stable pour les deux lois $+$ et $\cdot$
et si F muni des lois induites est un $\mathbb{K}$-e.v.

Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Sous-espace vectoriel

Soit F une partie non vide de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E
si F est stable pour les deux lois $+$ et $\cdot$
et si F muni des lois induites est un $\mathbb{K}$-e.v.

Exemple Triviaux

Caractérisation essentielle

Proposition - Caractérisation

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{array}{ll} (1) & F \neq \emptyset \\ (2) & \forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x,y)\in F^2, \quad \lambda\cdot x+\mu\cdot y \in F \end{array}$$

La deuxième condition se traduit par « F est stable par combinaison linéaire ».

Caractérisation essentielle

Proposition - Caractérisation

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{aligned} &(1) \quad F \neq \emptyset \\ &(2) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F \end{aligned}$$

La deuxième condition se traduit par « F est stable par combinaison linéaire ».

Démonstration

Caractérisation essentielle

Proposition - Caractérisation

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{aligned} &(1) \quad F \neq \emptyset \\ &(2) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F \end{aligned}$$

La deuxième condition se traduit par « F est stable par combinaison linéaire ».

Démonstration

Remarque Elément vide et 0_E

Caractérisation essentielle évoluée

Savoir-faire. Démontrer que F est un (s.)ev (de E)

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{array}{ll} (1') & 0_E \in F \\ (2) & \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x,y) \in F^2, \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{array}$$

Caractérisation essentielle évoluée

Savoir-faire. Démontrer que F est un (s.)ev (de E)

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{array}{ll} (1') & 0_E \in F \\ (2) & \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x,y) \in F^2, \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{array}$$

Exercice

Soit $F \subset E$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{array}{ll} (1) & F \neq \emptyset \\ (2) & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x,y) \in F^2, \quad \lambda.x + y \in F \end{array}$$

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

Sous-espace vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition - $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

L'ensemble des matrices scalaires, l'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices symétriques, l'ensemble des matrices antisymétriques, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Sous-espace vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition - $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

L'ensemble des matrices scalaires, l'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices symétriques, l'ensemble des matrices antisymétriques, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Exercice

A démontrer

Sous-espace polynomial

Proposition - $\mathbb{K}_n[X]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Sous-espace polynomial

Proposition - $\mathbb{K}_n[X]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Sous-espace géométrique

Proposition - Vision géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, ax+by=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ (a,b réels fixés, $(a,b)\neq(0,0)$) (droite vectorielle).
Dans $\mathbb{R}^3$: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, ax+by+cz=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ (a,b,c réels fixés, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$) (plan vectoriel). Il y a aussi des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.

Sous-espace fonctionnel

Proposition - Sev de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$

$\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ sont des s.e.v de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

Sous-espace fonctionnel

Proposition - Sev de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$

$\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ sont des s.e.v de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

Démonstration

Sous-espace fonctionnel

Proposition - Sev de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$

$\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ sont des s.e.v de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

Démonstration

Exercice

Les ensemble suivants sont-ils des s.e.v de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

- $\mathscr{P}$: ensembles des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires ;
- $\mathscr{I}$: ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaires ;
- $F_1 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 2f(0)\}$;
- $F_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) + 1\}$;
- $F_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0\}$.

Sous-espace séquentiel

Et pour l'espace vectoriel des suites numériques :

Exercice

Les ensemble suivants sont-ils des s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

- ensemble des suites géométriques de raison q (réel fixé) ;
- ensemble des suites géométriques ;
- ensemble des suites arithmétiques ;
- ensemble des suites convergentes ;
- ensemble des suites convergeant vers 0.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

- Stabilité par addition et multiplication externe par un scalaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

- Stabilité par addition et multiplication externe par un scalaire
- Ses objets s'appellent des vecteurs (comme avant), mais le point de vue est plus large !
  Tout se restreint à une définition de structure.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

- Les classiques : $\mathbb{K}[X]$ et comme sev : $\mathbb{K}_n[X]$,

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

- Les classiques : $\mathbb{K}[X]$ et comme sev : $\mathbb{K}_n[X]$,
- Les classiques : $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ ou plus généralement $\mathbb{K}^n$

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

- Les classiques : $\mathbb{K}[X]$ et comme sev : $\mathbb{K}_n[X]$,
- Les classiques : $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ ou plus généralement $\mathbb{K}^n$
- Les exemples d'analyse : $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$...et comme sev : l'ensemble des fonctions paires...

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 22 : Espace vectoriels
  3. Famille de vecteurs
- Exercice n° 471 & 472
  8h-10h : N° 476, 479, 481, 483, 486, 491
  10h-12h : N° 477, 480, 482, 485, 487, 492