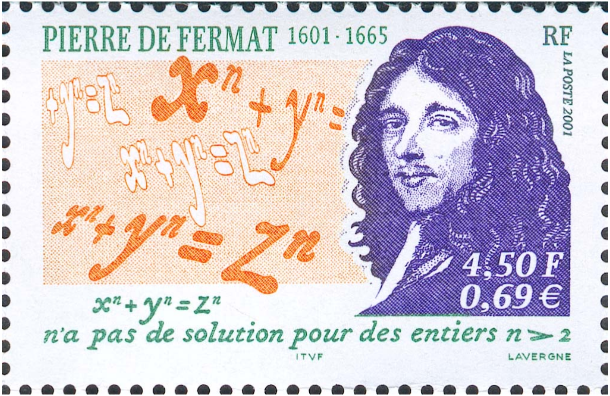

Leçon 68 - Espace vectoriel

5 mars 2025

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

Double point de vue

Heuristique. Comme pour les groupes : 2 points de vue

Le nom de sous-espace engendré par une partie A de E donne l'idée du plus petit sous-espace vectoriel de E que l'on peut obtenir en ne prenant que des éléments de A. Un espace strictement plus grand (pour l'inclusion) continent nécessairement des éléments qui ne sont pas obtenables à partir des combinaisons linéaires de A. Ce point correspond bien au nom donné, mais ce n'est pas le point de vue le plus simple mathématiquement pour prouver l'existence.

Le second point de vue consiste à considérer tous les espaces vectoriels qui contiennent A et de prendre parmi ceux-ci le plus petit. Or on sait, qu'en faisant l'intersection des espaces, on obtient nécessairement un ensemble qui contient A (qui est dans tous) et qui est le plus petit. C'est bien le même point de vue que celui choisi pour les groupes engendrés.

Intersection

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Théorème - Intersection de s.e.v

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E. Alors $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v de E. Plus généralement, soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E (I fini ou infini). Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v de E.

Intersection

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Théorème - Intersection de s.e.v

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E. Alors $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v de E. Plus généralement, soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E (I fini ou infini). Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v de E.

Démonstration

Plus petit des minorants

Si $A \subset E$, $\mathscr{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

Plus petit des minorants

Si $A \subset E$, $\mathscr{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

Définition - Sous espace engendré par une partie

Soit $A \subset E$. L'ensemble des s.e.v de E contenant A admet un plus petit élément pour l'inclusion que l'on appelle sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\mathrm{vect}(A)$. C'est l'intersection de tous les s.e.v contenant A.

Plus petit des minorants

Si $A \subset E$, $\mathscr{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

Définition - Sous espace engendré par une partie

Soit $A \subset E$. L'ensemble des s.e.v de E contenant A admet un plus petit élément pour l'inclusion que l'on appelle sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\text{vect}(A)$. C'est l'intersection de tous les s.e.v contenant A.

Démonstration

Plus petit des minorants

Si $A \subset E$, $\mathscr{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

Définition - Sous espace engendré par une partie

Soit $A \subset E$. L'ensemble des s.e.v de E contenant A admet un plus petit élément pour l'inclusion que l'on appelle sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\mathrm{vect}(A)$. C'est l'intersection de tous les s.e.v contenant A.

Démonstration

Remarque Si A est déjà un espace vectoriel.

Caractérisation

Théorème - Caractérisation

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.
$\mathrm{vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\mathrm{vect}(A) = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \cdots + \lambda_n \cdot a_n\,;\, n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{K}^n, (a_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in A^n\}.$$

$$\mathrm{vect}(A) = \{\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k \mid (\lambda_k) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, (a_k) \in A^{(\mathbb{N})}\}$$

Caractérisation

Théorème - Caractérisation

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

$\mathrm{vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\mathrm{vect}(A) = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \cdots + \lambda_n \cdot a_n ; n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{K}^n, (a_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in A^n\}.$$

$$\mathrm{vect}(A) = \{\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k \mid (\lambda_k) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, (a_k) \in A^{(\mathbb{N})}\}$$

Démonstration

Espace engendré par une partie

Définition - Sous espace vectoriel engendré par une famille

On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E le s.e.v engendré par $\{x_i; i \in I\}$. C'est donc l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des x_i.

Espace engendré par une partie

Définition - Sous espace vectoriel engendré par une famille

On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E le s.e.v engendré par $\{x_i; i \in I\}$. C'est donc l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des x_i.

Exemple Dans le $\mathbb{R}$ev $\mathbb{C}$

Savoir-faire

Savoir-faire. Montrer un espace vectoriel par famille génératrice

Cela peut servir à prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel ; par exemple

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, (x,y,z)=\lambda(1,0,1)+\mu(2,2,1)\}$$

$$=\mathrm{vect}\big((1,0,1),(2,2,1)\big)$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Savoir-faire

Savoir-faire. Montrer un espace vectoriel par famille génératrice

Cela peut servir à prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel ; par exemple

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, (x,y,z)=\lambda(1,0,1)+\mu(2,2,1)\}$$

$$=\mathrm{vect}\big((1,0,1),(2,2,1)\big)$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

<u>Exercice</u>

Caractériser par une équation le s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $A=\{(1,1,1),(1,0,1)\}$.

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

Addition d'espaces vectoriels : $F + G = \mathrm{vect}(F \cup G)$

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Somme d'espaces vectoriels

Soient $F_1,\ldots,F_n$ des s.e.v de E $(n \in \mathbb{N}^*)$. On appelle somme des s.e.v F_i l'ensemble

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \mid \forall i \in [\![1,n]\!], x_i \in F_i\}$$

Lien avec les espaces engendrés

Théorème - Addition et partie engendrée

$F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est un s.e.v de E et on a $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \text{vect}(F_1 \cup \ldots \cup F_n)$ (c'est le plus petit s.e.v de E qui contienne $F_1 \cup \ldots \cup F_n$.)

Lien avec les espaces engendrés

Théorème - Addition et partie engendrée

$F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est un s.e.v de E et on a $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \mathrm{vect}(F_1 \cup \ldots \cup F_n)$ (c'est le plus petit s.e.v de E qui contienne $F_1 \cup \ldots \cup F_n$.)

Démonstration

Lien avec les espaces engendrés

Théorème - Addition et partie engendrée

$F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est un s.e.v de E et on a $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \text{vect}(F_1 \cup \ldots \cup F_n)$ (c'est le plus petit s.e.v de E qui contienne $F_1 \cup \ldots \cup F_n$.)

Démonstration

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, vérifier que $F = \{(x,0,0); x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,x,0); x \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F + G$.

Somme directe

Savoir-faire. Caractérisations. $x \in F \cap G$ et $x \in F + G$

On a alors

$$x \in F \cap G \iff x \in F \text{ et } x \in G$$
$$x \in F + G \iff \exists\, a \in F, \exists\, b \in G x \text{ tels que } x = a + b$$

Somme directe

Savoir-faire. Caractérisations. $x \in F \cap G$ et $x \in F + G$

On a alors

$$\begin{aligned} x \in F \cap G &\iff x \in F \text{ et } x \in G \\ x \in F + G &\iff \exists\, a \in F, \exists\, b \in G x \text{ tels que } x = a + b \end{aligned}$$

Attention. Deux erreurs classiques qui en découlent

- Si $x \in F + G$ et $x \notin G \not\Rightarrow x \in F$.
- $E = F \oplus G = F \oplus H \not\Rightarrow G = H$.

Ecrire cela serait confondre les notions de supplementarité et de complémentarité

Somme directe

Proposition - Somme directe

Soient $F_1,\dots,F_n$ des s.e.v de E ($n \in \mathbb{N}^*$). Il y a équivalence de :

(i) tout élément x de $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ avec $\forall i, x_i \in F_i$

(ii) $\forall\ (x_1,\dots,x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow \forall i, x_i = 0_E$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que les F_i sont en somme directe et on note leur somme $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Somme directe

Proposition - Somme directe

Soient $F_1,\ldots,F_n$ des s.e.v de E ($n \in \mathbb{N}^*$). Il y a équivalence de :

(i) tout élément x de $F_1+F_2+\cdots+F_n$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1+x_2+\cdots+x_n$ avec $\forall i, x_i \in F_i$

(ii) $\forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in F_1\times\ldots\times F_n, x_1+\cdots+x_n = 0_E \Rightarrow \forall i, x_i = 0_E$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que les F_i sont en somme directe et on note leur somme $F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

Démonstration

Espace supplémentaires ($\neq$ complémentaires)

Corollaire - Cas de 2 s.e.v

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E. F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Espace supplémentaires ($\neq$ complémentaires)

Corollaire - Cas de 2 s.e.v

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E. F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Définition - Espaces supplémentaires

F_1 et F_2 deux s.e.v de E sont dits supplémentaires si $E = F_1 \oplus F_2$, ce qui équivaut à :

$$E = F_1 + F_2 \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

ou à : tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

Attention ! !

Attention. Notation piégée

Lorsqu'on écrit : $E = F_1 \oplus F_2$, il y a bien DEUX affirmations (deux propositions ou deux verbes) :

- $E = F_1 + F_2$
- La somme est directe : $F_1 \oplus F_2$ ou $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

Attention ! !

Attention. Notation piégée

Lorsqu'on écrit : $E = F_1 \oplus F_2$, il y a bien DEUX affirmations (deux propositions ou deux verbes) :

- $E = F_1 + F_2$
- La somme est directe : $F_1 \oplus F_2$ ou $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

Exemple Dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$

Attention ! !

Attention. Notation piégée

Lorsqu'on écrit : $E = F_1 \oplus F_2$, il y a bien DEUX affirmations (deux propositions ou deux verbes) :

- $E = F_1 + F_2$
- La somme est directe : $F_1 \oplus F_2$ ou $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

Exemple Dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$

Remarque Autour de la notion de supplémentaire

Exercice d'application

Dans ce genre d'exercice, on exploite souvent le raisonnement en analyse-synthèse.

Exercice d'application

Savoir-faire. Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires

Montrer que $E = F \oplus G$.

- L'analyse : Supposons que $E = F + G$.
  Soit $x \in E$, alors il existe $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
  Il faut découpler y et z, et exprimer (grâce aux propriétés de F et G), y uniquement en fonction de x et z uniquement en fonction de x...
  Fin de l'analyse : On ne sait pas si (y,z) existe, mais s'il existe, il est unique. On a $F \cap G = \{0\}$.
- La synthèse. On fixe x, on reprend y_x et z_x.
  On vérifie : $y_x \in F$, $z_x \in G$ et $y_x + z_x = x$.
  Fin de la synthèse. Pour tout x, le couple $(y,z) \in F \times G$ (tel que $x = y + z$) existe bien. On a $E = F + G$

Exercice d'application

Savoir-faire. Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires

Montrer que $E = F \oplus G$.

- L'analyse : Supposons que $E = F + G$.
  Soit $x \in E$, alors il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
  Il faut découpler y et z, et exprimer (grâce aux propriétés de F et G), y uniquement en fonction de x et z uniquement en fonction de x...
  Fin de l'analyse : On ne sait pas si (y, z) existe, mais s'il existe, il est unique. On a $F \cap G = \{0\}$.
- La synthèse. On fixe x, on reprend y_x et z_x.
  On vérifie : $y_x \in F$, $z_x \in G$ et $y_x + z_x = x$.
  Fin de la synthèse. Pour tout x, le couple $(y, z) \in F \times G$ (tel que $x = y + z$) existe bien. On a $E = F + G$

<u>Exercice</u>

Montrer que $\mathscr{P}$ (fonctions paires) et $\mathscr{I}$ (fonctions impaires) sont des s.e.v supplémentaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

Définition

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (avec le même corps $\mathbb{K}$, usuellement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition - Application linéaire

Soit u une application de E dans F. On dit que u est linéaire si

$$(1) \quad \forall (x,y) \in E^2, u(x \underset{E}{+} y) = u(x) \underset{F}{+} u(y)$$

$$(2) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda \underset{E}{.} x) = \lambda \underset{F}{.} u(x)$$

Définition

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (avec le même corps $\mathbb{K}$, usuellement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition - Application linéaire

Soit u une application de E dans F. On dit que u est linéaire si

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall (x,y) \in E^2, u(x \underset{E}{+} y) = u(x) \underset{F}{+} u(y) \\ (2) & \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda \underset{E}{.} x) = \lambda \underset{F}{.} u(x) \end{array}$$

Savoir-faire. Montrer qu'une application est linéaire

$u : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, u(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$$

Définition

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (avec le même corps $\mathbb{K}$, usuellement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition - Application linéaire

Soit u une application de E dans F. On dit que u est linéaire si

$$(1) \quad \forall (x,y) \in E^2, u(x \underset{E}{+} y) = u(x) \underset{F}{+} u(y)$$

$$(2) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda \underset{E}{.} x) = \lambda \underset{F}{.} u(x)$$

Savoir-faire. Montrer qu'une application est linéaire

$u : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, u(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$$

Démonstration

Image d'une C.L.

Proposition - Image d'une application linéaire

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Alors

$$(1) \quad u(0_E) = 0_F$$

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n, \forall (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n,$$

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u(x_i)$$

Dans le cas d'une famille infinie $(x_i)_{i\in I}$, si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle, on a aussi $u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i.x_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i.u(x_i)$.

L'image d'une combinaison linéaire est donc la combinaison linéaire des images (avec les mêmes coefficients).

Vocabulaire

Définition - endo/iso/auto -morphisme

On appelle

- isomorphisme de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F ;
- endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E ;
- automorphisme de E un isomorphisme de E dans E ;
- forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note

- $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F (éventuellement $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ si ambiguité sur le corps $\mathbb{K}$) ;
- $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ ou E^* l'ensemble des formes linéaires sur E, aussi appelé dual de E ;
- $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E (i.e. $\mathscr{L}(E,E)$).

Exemples

Remarque Eléments neutres

Exemples

Remarque Eléments neutres

Exemple Donner des exemples :

- endomorphismes de $\mathbb{R}$
- forme linéaire sur $E = \mathbb{R}^4$
- endomorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$
- applications linéaires du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$
- dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$
- dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice

<u>Exercice</u>

Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ constitué des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit D l'application qui à une fonction de E associe sa dérivée et I l'application qui à une fonction f associe la primitive de f qui s'annule en 0.
Vérifier que D et I sont des endomorphismes de E. S'agit-il d'isomorphismes ? Que peut on dire de $D \circ I$ et de $I \circ D$?

Exercice

<u>Exercice</u>

Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ constitué des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit D l'application qui à une fonction de E associe sa dérivée et I l'application qui à une fonction f associe la primitive de f qui s'annule en 0.
Vérifier que D et I sont des endomorphismes de E. S'agit-il d'isomorphismes ? Que peut on dire de $D \circ I$ et de $I \circ D$?

Attention. Montrer la bijectivité

L'exemple précédent montrer qu'il faut bien les deux conditions $f \circ g = id$ ET $g \circ f = id$, pour pouvoir affirmer que f (ou g) est bijective. . .

Exercice

<u>Exercice</u>

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi: & F\times G & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & x+y. \end{array}$$

Montrer que ϕ est linéaire. A quelle condition sur F et G est-ce un isomorphisme ? Quel est alors l'isomorphisme réciproque ?

Vocabulaire

Définition - Image et noyau

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle

- noyau de u, l'ensemble
  $\operatorname{Ker} u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$
- image de u, l'ensemble
  $\operatorname{Im} u = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\} = u(E)$

Vocabulaire

Définition - Image et noyau

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle

- noyau de u, l'ensemble
  $\operatorname{Ker} u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$
- image de u, l'ensemble
  $\operatorname{Im} u = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\} = u(E)$

Théorème - Transformation par u linéaire, en sev

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- $\operatorname{Ker} u$ est un s.e.v de E, $\operatorname{Im} u$ est une s.e.v de F
- Plus généralement, si V est un s.e.v de E et W un s.e.v de F, alors $u^{-1}(W)$ est s.e.v de E et $u(V)$ est un s.e.v de F.

Rappels : $u(V) = \{u(x), x \in V\}$ et $u^{-1}(W) = \{x \in E \mid u(x) \in W\}$

Vocabulaire

Définition - Image et noyau

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle

- noyau de u, l'ensemble
  $\mathrm{Ker}\ u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$
- image de u, l'ensemble
  $\mathrm{Im}\ u = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\} = u(E)$

Théorème - Transformation par u linéaire, en sev

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- $\mathrm{Ker}\ u$ est un s.e.v de E, $\mathrm{Im}\ u$ est une s.e.v de F
- Plus généralement, si V est un s.e.v de E et W un s.e.v de F, alors $u^{-1}(W)$ est s.e.v de E et $u(V)$ est un s.e.v de F.

Rappels : $u(V) = \{u(x), x \in V\}$ et $u^{-1}(W) = \{x \in E \mid u(x) \in W\}$

Démonstration

Exercice

<u>Exercice</u>

Montrer que l'application

$$u : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y-z, x-y+2z) \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer son noyau et son image.

Critères

Théorème - Critère d'injectivité et de surjectivité

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \ u = \{0_E\}$$

$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow \operatorname{Im} \ u = F$$

Critères

Théorème - Critère d'injectivité et de surjectivité

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ u = \{0_E\}$$

$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ u = F$$

Démonstration

Critères

Théorème - Critère d'injectivité et de surjectivité

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$$

$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow \operatorname{Im} u = F$$

Démonstration

Exercice

L'application linéaire D qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe P' est-elle injective ? surjective ?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Sous-espace vectoriel engendré

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

- Si A et B sont des sev, alors $A \cap B$ est un sev

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

- Si A et B sont des sev, alors $A \cap B$ est un sev
- $\mathrm{vect}(A) = \bigcap_{B sev contenant A} B$ est un sev, le plus petit contenant A.

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

- Si A et B sont des sev, alors $A \cap B$ est un sev
- $\mathrm{vect}(A) = \bigcap_{B sev contenant A} B$ est un sev, le plus petit contenant A.
- Si A et B sont des sev, alors
  $A + B = \mathrm{vect}(A \cup B) = \{x + y, x \in A, y \in B\}$ est un sev.

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- Ce sont les transformations « naturelles »entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- Ce sont les transformations « naturelles »entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)
- $f : E \to F$ est linéaire ssi $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x_1, x_2 \in E$, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- Ce sont les transformations « naturelles »entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)
- $f : E \to F$ est linéaire ssi $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x_1, x_2 \in E$, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$
- Vocabulaire : morphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- Ce sont les transformations « naturelles »entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)
- $f : E \to F$ est linéaire ssi $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x_1, x_2 \in E$, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$
- Vocabulaire : morphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire
- Vocabulaire (qui prolonge celui vu sur les matrices) :
  image de f : $\mathrm{Im}\ f$ ou noyau de f : $\mathrm{Ker}\ f$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- Ce sont les transformations « naturelles »entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)
- $f: E \to F$ est linéaire ssi $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x_1, x_2 \in E$, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$
- Vocabulaire : morphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire
- Vocabulaire (qui prolonge celui vu sur les matrices) :
  image de f : $\operatorname{Im} f$ ou noyau de f : $\operatorname{Ker} f$.
- f est injective ssi f conserve la liberté ssi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$
  et f est surjective ssi f conserve la génération ssi $\operatorname{Im} f = F$

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 27 : Espace vectoriels
  5. Familles de vecteurs
- Exercice n°478 & 488