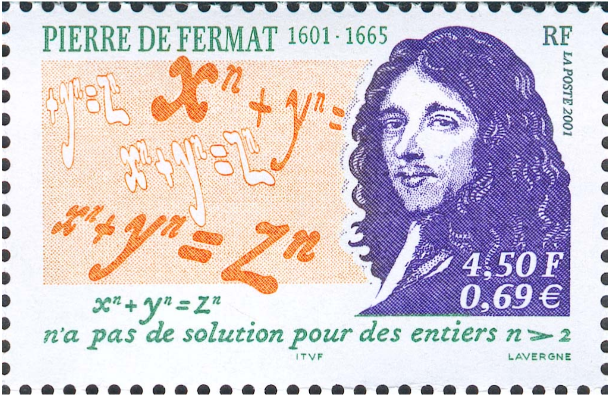

Leçon 69 - Espace vectoriel

6 mars 2025

⇒ $\mathscr{L}(E)$
⇒ Projecteurs et symétries

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow$ Anneau des endomorphismes

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Structures de $\mathscr{L}(E,F)$
   4.1. Définitions et exemples
   4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
   4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
   4.4. Projecteurs et symétries

⇒ Anneau des endomorphismes

⇒ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Structures de $\mathscr{L}(E,F)$

   4.1. Définitions et exemples

   4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

   4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

   4.4. Projecteurs et symétries

Structure d'espace vectoriel

Théorème - Structure d'espace vectoriel

$(\mathscr{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Structure d'espace vectoriel

Théorème - Structure d'espace vectoriel

$(\mathscr{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque Interprétation

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E.

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration

Définition - Espaces isomorphes

Deux $\mathbb{K}$-e.v. E et F tels qu'il existe un isomorphisme de E dans F sont dits isomorphes.

⇒ $\mathscr{L}(E)$
⇒ Projecteurs et symétries
1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Linéarité de la composition

Théorème - Linéarité de la composition

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors l' application $\begin{array}{ll} \mathscr{L}(F,G) & \to \mathscr{L}(E,G) \\ v & \mapsto v \circ u \end{array}$ est linéaire i.e

$$(\lambda.v_1 + \mu.v_2) \circ u = \lambda.v_1 \circ u + \mu.v_2 \circ u$$

Soit $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors l' application $\begin{array}{ll} \mathscr{L}(E,F) & \to \mathscr{L}(E,G) \\ u & \mapsto v \circ u \end{array}$ est linéaire i.e

$$v \circ (\lambda.u_1 + \mu.u_2) = \lambda.v \circ u_1 + \mu.v \circ u_2$$

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Linéarité de la composition

Théorème - Linéarité de la composition

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors l' application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(F,G) & \to & \mathscr{L}(E,G) \\ v & \mapsto & v \circ u \end{array}$ est linéaire i.e

$$(\lambda.v_1 + \mu.v_2) \circ u = \lambda.v_1 \circ u + \mu.v_2 \circ u$$

Soit $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors l' application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{L}(E,G) \\ u & \mapsto & v \circ u \end{array}$ est linéaire i.e

$$v \circ (\lambda.u_1 + \mu.u_2) = \lambda.v \circ u_1 + \mu.v \circ u_2$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow$ Anneau des endomorphismes

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Structures de $\mathscr{L}(E,F)$
   4.1. Définitions et exemples
   4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
   4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
   4.4. Projecteurs et symétries

$\mathscr{L}(E)$

Théorème - Structure de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

- $(\mathscr{L}(E),+)$ est un groupe commutatif ;
- $(\mathscr{L}(E),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau non commutatif (sauf si E de dimension finie égale à 1), en particulier la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E ;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2, (\lambda.v)\circ u = \lambda.(v \circ u) = v \circ (\lambda.u)$

On résume ces propriétés en disant que $(\mathscr{L}(E),+,\circ,.)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

$\mathscr{L}(E)$

Théorème - Structure de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

- $(\mathscr{L}(E),+)$ est un groupe commutatif ;
- $(\mathscr{L}(E),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau non commutatif (sauf si E de dimension finie égale à 1), en particulier la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E ;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2, (\lambda.v)\circ u = \lambda.(v\circ u) = v\circ(\lambda.u)$

On résume ces propriétés en disant que $(\mathscr{L}(E),+,\circ,.)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Exercice

Donner un contre-exemple pour la commutativité.

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Arithmétique dans $\mathscr{L}(E)$

Proposition - Règles de calcul dans $\mathscr{L}(E)$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ u^n par

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall n \geqslant 1, u^n = u \circ u^{n-1} = \underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{n facteurs}.$$

Pour u et v qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) on a les formules suivantes :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} \text{ (Formule du binôme)}$$
$$u^n - v^n = (u-v) \circ (u^{n-1} + u^{n-2} \circ v + \ldots + u \circ v^{n-2} + v^{n-1}) \text{ (Factorisation)}$$
$$Id_E - v^n = (Id_E - v) \circ (Id_E + v + v^2 + \ldots + v^{n-1})$$

On note parfois $u \circ v = uv$.

⇒ $\mathscr{L}(E)$
⇒ Projecteurs et symétries
1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Relation polynomiale !

Attention. uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u \times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Relation polynomiale !

Attention. uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u \times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

Application A compléter

$(u+v)^2 =$, $u^2 - v^2 =$, $u^3 - v^3 =$

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Relation polynomiale !

Attention. uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u \times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

Application A compléter

$$(u+v)^2 = \qquad , u^2 - v^2 = \qquad , u^3 - v^3 =$$

Remarque Démonstration

Relation polynomiale !

Attention. uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u\times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

Application A compléter

$$(u+v)^2 = \qquad , u^2-v^2 = \qquad , u^3-v^3 =$$

Remarque Démonstration

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que si $v=\sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ (avec $n\in\mathbb{N}$, $a_k\in\mathbb{K}$), alors v commute avec toute puissance de u, puis que v commute avec $w=\sum_{k=0}^{m} b_k u^k$ (avec $m\in\mathbb{N}$, $b_k\in\mathbb{K}$).

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Groupe linéaire

Proposition - Groupe linéaire

La réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E.
L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est donc un groupe (en général non commutatif) appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Groupe linéaire

Proposition - Groupe linéaire

La réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E.
L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est donc un groupe (en général non commutatif) appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Groupe linéaire

Proposition - Groupe linéaire

La réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E.
L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est donc un groupe (en général non commutatif) appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.

Démonstration

Définition - Homothéties de E

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'endomorphisme $\lambda.Id_E : x \mapsto \lambda.x$ s'appelle l' homothétie de rapport λ.
Une homothétie de rapport non nul est un automorphisme.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow$ Anneau des endomorphismes

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Structures de $\mathscr{L}(E,F)$
   4.1. Définitions et exemples
   4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
   4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
   4.4. Projecteurs et symétries

Projecteur

Définition - Projecteur

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On sait que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
L'application

$$p: \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x_1 \end{array}$$

s'appelle le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 (ou de direction E_2) ;

$$q = Id_E - p: \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x_2 \end{array}$$

s'appelle le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 (ou de direction E_1).
On dit que p et q sont des projecteurs associés (car ils sont définis par la même décomposition de E en s.e.v supplémentaires).

Proposition

Remarque Rappel (?) de la projection dans le plan

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Proposition

Remarque Rappel (?) de la projection dans le plan

Remarque A partir de l'analyse-synthèse

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Proposition

Remarque Rappel (?) de la projection dans le plan

Remarque A partir de l'analyse-synthèse

Proposition - Propriétés premières d'un projecteur

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$. Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2, alors :

- p est un endomorphisme de E;
- $E_1 = \{x \in E \mid p(x) = x\}$ (ensemble des invariants par p);
- $\mathrm{Im}\ p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\ p = E_2$;
- $p \circ p = p$.

Démonstration

Caractéristation

Remarque Relation entre les deux projecteurs

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Caractéristation

Remarque Relation entre les deux projecteurs

Théorème - Caractérisation

Soit p un endomorphisme de E.
Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
On a alors $E = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\ p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ p$.

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Caractéristation

Remarque Relation entre les deux projecteurs

Théorème - Caractérisation

Soit p un endomorphisme de E.
Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
On a alors $E = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\ p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ p$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Symétries

Définition - Symétrie

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On sait que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 (ou symétrie d'axe E_1 de direction E_2) l'application

$$s: \begin{array}{ll} E & \to E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto x_1 - x_2 \end{array}$$

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
   4.1. Définitions et exemples
   4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
   4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
   4.4. Projecteurs et symétries

Proposition

Proposition - Propriétés premières de s

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Alors

- si p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 on a $s = 2p - Id_E$;
- s est un endomorphisme de E et $s \circ s = Id_E$ (on dit que s est une involution de E).

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Proposition

Proposition - Propriétés premières de s

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Alors

- si p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 on a $s = 2p - Id_E$;
- s est un endomorphisme de E et $s \circ s = Id_E$ (on dit que s est une involution de E).

Démonstration

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
   - 4.1. Définitions et exemples
   - 4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
   - 4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
   - 4.4. Projecteurs et symétries

Caractérisation

Théorème - Caractérisation

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$.
Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.
On a alors $E = \mathrm{Ker}\,(s - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Caractérisation

Théorème - Caractérisation

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$.
Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.
On a alors $E = \operatorname{Ker}(s - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + Id_E)$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Caractérisation

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Caractérisation

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$.
Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.
On a alors $E = \mathrm{Ker}\,(s - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$.

Démonstration

<u>Exercice</u>

$E = \mathbb{R}^2$, on désigne par f l'endomorphisme de E défini par $f((x,y)) = (2x - y, 2x - y)$.
Montrer que f est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques. On notera $E_1 = \mathrm{Im}\, f$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\, f$.
Donner la détermination analytique de la symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Anneau $\mathscr{L}(E)$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

⇒ Anneau $\mathscr{L}(E)$

- $(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Anneau $\mathscr{L}(E)$

- $(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Anneau $\mathscr{L}(E)$

- $(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau
- Il en découle toutes les lois imaginables sur les compositions $u\circ u\circ\cdots u = u^n\ldots$

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Anneau $\mathscr{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Anneau $\mathscr{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

- Nécessaire : $E = F \oplus G$. $p : x \mapsto y$ tel que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Anneau $\mathscr{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

- Nécessaire : $E = F \oplus G$. $p : x \mapsto y$ tel que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
- Alors $p^2 = p$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Anneau $\mathscr{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

- Nécessaire : $E = F \oplus G$. $p : x \longmapsto y$ tel que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
- Alors $p^2 = p$
- Réciproquement, si $p^2 = p$, alors p est la projection de E sur $\mathrm{Im}\ p$ de direction $\mathrm{Ker}\ p$.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Anneau $\mathscr{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

- Nécessaire : $E = F \oplus G$. $p : x \mapsto y$ tel que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
- Alors $p^2 = p$
- Réciproquement, si $p^2 = p$, alors p est la projection de E sur $\mathrm{Im}\ p$ de direction $\mathrm{Ker}\ p$.
- $s : x \mapsto y - z$. Alors $s^2 = \mathrm{id}_E$.
  Et réciproquement...

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathscr{L}(E,F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

⇒ Anneau $\mathscr{L}(E)$

⇒ Projecteurs et symétries

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 27 : Espace vectoriels
  5. Familles de vecteurs
- Exercice n° 495 & 496

1. Problèmes
2. Structure d'e.v.
3. S.e.v
4. $\mathscr{L}(E,F)$
4.1. Définitions et exemples
4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$
4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$
4.4. Projecteurs et symétries