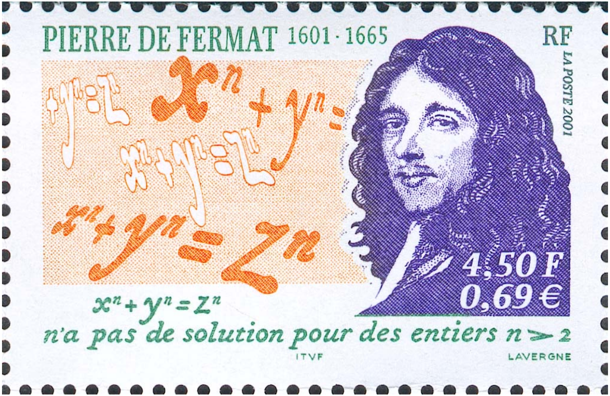

Leçon 71 - Espace vectoriel

11 mars 2025

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

Problèmes introductifs

Problème - Combinaison linéaire

Problèmes introductifs

Problème - Combinaison linéaire

Problème - Combinaison linéaire unique

Problèmes introductifs

Problème - Combinaison linéaire

Problème - Combinaison linéaire unique

Problème - Coordonnées et projections

Problèmes introductifs

Problème - $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie

Problèmes introductifs

Problème - $f \in \mathscr{L}(E,F)$ **avec** E **et** F **de dimension finie**

Problème - Changement de bases

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

Base de E ? Famille libre et génératrice de E

Définition - Base d'un espace vectoriel

On dit qu'une famille de vecteurs de E est une base de E si elle est une famille libre et génératrice de E.

Base de E ? Famille libre et génératrice de E

Définition - Base d'un espace vectoriel

On dit qu'une famille de vecteurs de E est une base de E si elle est une famille libre et génératrice de E.

Attention. Non unicité

On dit bien UNE base et non LA base de E...

Base de E ? Famille libre et génératrice de E

Définition - Base d'un espace vectoriel

On dit qu'une famille de vecteurs de E est une base de E si elle est une famille libre et génératrice de E.

Attention. Non unicité

On dit bien UNE base et non LA base de E...

Exemple Nombreux exemples.

- une base de $\mathbb{R}^2$ est
- une base du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$ est
- une base de $\{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'' + y' - 2y = 0\}$ est

Bases canoniques

Proposition - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$

On définit la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ par

$$e_1 = (1,0,\ldots,0); e_2 = (0,1,0,\ldots,0); \ldots; e_n = (0,\ldots,0,1).$$

Alors cette famille est une base du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{i\in\mathbb{N}_n, j\in\mathbb{N}_p}$.
La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \ldots, X^n) = (X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, celle de $\mathbb{K}[X]$ est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Bases canoniques

Proposition - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$

On définit la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ par

$$e_1=(1,0,\ldots,0);e_2=(0,1,0,\ldots,0);\ldots;e_n=(0,\ldots,0,1).$$

Alors cette famille est une base du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{i\in\mathbb{N}_n,j\in\mathbb{N}_p}$.
La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1,X,X^2,\ldots,X^n)=(X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, celle de $\mathbb{K}[X]$ est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

<u>Exercice</u>

Déterminer une base du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}^n$.

Bases canoniques

Proposition - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$

On définit la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ par

$$e_1=(1,0,\dots,0);e_2=(0,1,0,\dots,0);\dots;e_n=(0,\dots,0,1).$$

Alors cette famille est une base du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{i\in\mathbb{N}_n,j\in\mathbb{N}_p}$.
La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1,X,X^2,\dots,X^n)=(X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, celle de $\mathbb{K}[X]$ est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

<u>Exercice</u>
Déterminer une base du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}^n$.

Remarque. Démonstration de la base canonique

Caractérisation

Théorème - Caractérisation de la base

Une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$,

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s'appellent les coordonnées (ou composantes) de x dans la base $\mathscr{B}$.

Heuristique

Heuristique. La fonction Φ

D'après ce théorème, si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow E, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

est une application bijective : $\forall\ x \in E$, $\exists\ !(\lambda_i)_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.

Les coordonnées de x sont alors les antécédents de x par $\Phi_{\mathscr{B}}$.

Pour la démonstration qui va suivre, on va montrer :

- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est injective si et seulement si $\mathscr{B}$ est libre.
- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est surjective si et seulement si $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Heuristique

Heuristique. La fonction Φ

D'après ce théorème, si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow E, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

est une application bijective : $\forall\ x \in E$, $\exists\ !(\lambda_i)_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.

Les coordonnées de x sont alors les antécédents de x par $\Phi_{\mathscr{B}}$.

Pour la démonstration qui va suivre, on va montrer :

- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est injective si et seulement si $\mathscr{B}$ est libre.
- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est surjective si et seulement si $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Démonstration

Quelques remarques

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'« *une famille est génératrice (ou une base)**DE E*** », si on oublie l'objet indirect (« de . . . ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de « *une famille est libre* ».

Quelques remarques

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'« *une famille est génératrice (ou une base)**DE E*** », si on oublie l'objet indirect (« de ... ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de « *une famille est libre* ».

Remarque. Base infinie

Quelques remarques

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'« *une famille est génératrice (ou une base)**DE E*** », si on oublie l'objet indirect (« de ... ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de « *une famille est libre* ».

Remarque. Base infinie

Application Exemples classiques

- les coordonnées de $a+ib$ dans la base $(1,i)$ du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$ sont

- les coordonnées de $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont

Quelques remarques

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'*« une famille est génératrice (ou une base)**DE E** »*, si on oublie l'objet indirect (« de ... ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de *« une famille est libre »*.

Remarque. Base infinie

Application Exemples classiques

• les coordonnées de $a+ib$ dans la base $(1,i)$ du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$ sont (a,b)

• les coordonnées de $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

Réduction des hypothèses

Proposition - Base

Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une famille d'éléments de E.
On a les équivalences :

(i) $\mathscr{F}$ est une base de E.

(ii) $\mathscr{F}$ est une famille libre maximale (dans E).

(iii) $\mathscr{F}$ est une famille génératrice minimale de E.

Deux lemmes

On commence par démontrer deux lemmes :

Deux lemmes

On commence par démontrer deux lemmes :

Lemme - Complétion libre

Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $x \in E$.

$x \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ ssi $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est encore libre.

ou $x \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ ssi $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est liée.

Deux lemmes

On commence par démontrer deux lemmes :

Lemme - Complétion libre

Soient $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de E et $x \in E$.

$x \notin \text{vect}(e_1,\dots,e_p)$ ssi $(e_1,\dots,e_p,x)$ est encore libre.

ou $x \in \text{vect}(e_1,\dots,e_p)$ ssi $(e_1,\dots,e_p,x)$ est liée.

Lemme - Réduction liée

Soit $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1})$ une famille de E.

$e_{p+1} \in \text{vect}(e_1,\dots,e_p)$ ssi $\text{vect}(e_1 \dots e_{p+1}) = \text{vect}(e_1 \dots e_p)$

Deux lemmes

Lemme - Complétion libre

Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $x \in E$.

$x \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ ssi $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est encore libre.

ou $x \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ ssi $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est liée.

Lemme - Réduction liée

Soit $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1})$ une famille de E.

$e_{p+1} \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ ssi $\mathrm{vect}(e_1 \ldots e_{p+1}) = \mathrm{vect}(e_1 \ldots e_p)$

Heuristique - Interprétation en terme de famille libre maximale et famille génératrice minimale

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre et $x \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$,

alors $(e_1, \ldots e_p)$ n'est pas maximale.

Si $(e_1 \ldots e_{p+1})$ est génératrice de E et $e_{p+1} \in \mathrm{vect}(e_1 \ldots e_p)$,

alors $(e_1, \ldots e_p, e_{p+1})$ n'est pas minimale.

Démonstrations

Démonstration des lemmes

Démonstrations

Démonstration des lemmes

Démonstration

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

Existence de bases

Définition - Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Par convention $\{0_E\}$ est un espace de dimension finie.
S'il n'est pas de dimension finie, E est dit de dimension infinie.

Lemme de Steinitz

On a le théorème suivant très important :

Théorème - Théorème de la base incomplète (lemme de Steinitz)

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_q)$ une famille génératrice de E, alors : il existe une base de E de la forme $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ où $\{e_{p+1}, \dots, e_n\} \subset \mathscr{F}$ (quitte à être vide).
En d'autres termes on peut compléter une famille libre de E en une base avec des vecteurs pris dans une famille génératrice.

Lemme de Steinitz

On a le théorème suivant très important :

Théorème - Théorème de la base incomplète (lemme de Steinitz)

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_q)$ une famille génératrice de E, alors : il existe une base de E de la forme $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ où $\{e_{p+1}, \ldots, e_n\} \subset \mathscr{F}$ (quitte à être vide).
En d'autres termes on peut compléter une famille libre de E en une base avec des vecteurs pris dans une famille génératrice.

Démonstration

Algorithme !

Cela donne un algorithme de complétion de famille libre, en une base (si l'espace est de dimension finie) :

Savoir-faire. Base incomplète

Algorithme !

Cela donne un algorithme de complétion de famille libre, en une base (si l'espace est de dimension finie) :

Savoir-faire. Base incomplète

Pour le théorème de la base incomplète, on exploite un algorithme plus efficace. On suit l'algorithme suivant :

```
E=vect(B) #A definir...
for i in range(q):
    if f[i] notin E :
        B=B+[f[i]]
        E=vect(B)
return(B)
```

L'algorithme termine car il est paramétré avec une boucle `for`. L'algorithme renvoie la famille libre maximale, contenant e_i, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$.

Algorithme !

Cela donne un algorithme de complétion de famille libre, en une base (si l'espace est de dimension finie) :

Savoir-faire. Base incomplète

Par construction, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i \in \mathrm{vect}(B)$,

- en effet, ou bien f_i n'appartenait pas à B au moment du test, et alors, on l'a mis dans B,
- ou bien il en faisait partie et toujours à la fin.

D'après le lemme de réduction : $\mathrm{vect}\mathscr{F} = E \subset \mathrm{vect}(B)$.

Donc B est également une famille génératrice de E.

Il faut également montrer que B est une famille libre.

En fait, pour tout i, B_i est libre d'après le lemme de complétion libre.

C'est donc également le cas en fin d'algorithme.

Exercice

Application Compléter $\mathscr{E} = ((1,1,1),(1,-1,-1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale
- Il y a une multitude de bases possibles pour un espace de dimension finie.
  Certaines sont reconnues comme canoniques (=naturelles)

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale
- Il y a une multitude de bases possibles pour un espace de dimension finie.
  Certaines sont reconnues comme canoniques (=naturelles)
- Si $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de E,
  Alors pour tout $x \in E$, $\exists\, !(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale
- Il y a une multitude de bases possibles pour un espace de dimension finie.
  Certaines sont reconnues comme canoniques (=naturelles)
- Si $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de E,
  Alors pour tout $x \in E$, $\exists\, !(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
- On peut compléter une famille $\mathscr{F}$ libre en ajoutant x
  ssi ce vecteur x n'est pas c.l. des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale
- Il y a une multitude de bases possibles pour un espace de dimension finie.
  Certaines sont reconnues comme canoniques (=naturelles)
- Si $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de E,
  Alors pour tout $x \in E$, $\exists\, !(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
- On peut compléter une famille $\mathscr{F}$ libre en ajoutant x
  ssi ce vecteur x n'est pas c.l. des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.
- On peut réduire une famille $\mathscr{F}$ génératrice de E en lui enlevant x
  ssi ce vecteur x est c.l. des autres vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie

  2.3. Dimension. . .
- Exercice n° 475 & 507
- TD de Jeudi :

  8h-10h : 510, 509, 514, 516, 529

  10h-12h : 511, 512, 515, 518, 532