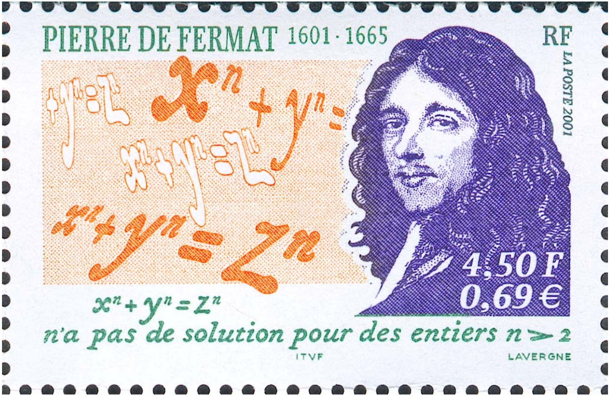

Leçon 72 - Espace vectoriel

12 mars 2025

⇒ Dimension (définition)

⇒ Dimension (exploitation)

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

$\Rightarrow$ Dimension (définition)

$\Rightarrow$ Dimension (exploitation)

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Existence de bases

Définition - Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Par convention $\{0_E\}$ est un espace de dimension finie.
S'il n'est pas de dimension finie, E est dit de dimension infinie.

Lemme de Steinitz

On a le théorème suivant très important :

Théorème - Théorème de la base incomplète (lemme de Steinitz)

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_q)$ une famille génératrice de E, alors : il existe une base de E de la forme $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ où $\{e_{p+1}, \ldots, e_n\} \subset \mathscr{F}$ (quitte à être vide).
En d'autres termes on peut compléter une famille libre de E en une base avec des vecteurs pris dans une famille génératrice.

Application Compléter $\mathscr{E} = ((1,1,1),(1,-1,-1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

Application Compléter $\mathscr{E} = ((1,1,1),(1,-1,-1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

A partir d'un ensemble réduit à l'unique élément $\{0\}$,

Corollaire

Si E, non réduit au vecteur nul, est de dimension finie, alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

Application Compléter $\mathscr{E} = ((1,1,1),(1,-1,-1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

A partir d'un ensemble réduit à l'unique élément $\{0\}$,

Corollaire

Si E, non réduit au vecteur nul, est de dimension finie, alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

Corollaire

Tout espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul, admet une base.

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

Proposition - Relation entre cardinaux de familles libres/familles génératrices

Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathscr{L}$ est finie et $\mathrm{Card}\mathscr{L} \leqslant \mathrm{Card}\mathscr{G}$

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

Proposition - Relation entre cardinaux de familles libres/familles génératrices

Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathscr{L}$ est finie et $\mathrm{Card}\mathscr{L} \leqslant \mathrm{Card}\mathscr{G}$

Heuristique - Amélioration du lemme de Steinitz

On améliore la démonstration du lemme de Steinitz.
En cherchant un invariant : comment transformer un à un les élément de $\mathscr{G}$ en élément de $\mathscr{L}$ tout en gardant la génération de E.
On démontre que pour tout $s \leqslant \mathrm{card}(\mathscr{L}) = p$ $(q = \mathrm{card}(\mathscr{G}))$:
il existe $I_s \subset \mathbb{N}_q$, tel que $\mathrm{card}(I_s) = q - s$ et
$E = \mathrm{vect}\big((e_i)_{i\in\mathbb{N}_s}, (f_j)_{j\in I_s}\big)$

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

Proposition - Relation entre cardinaux de familles libres/familles génératrices

Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathscr{L}$ est finie et $\operatorname{Card}\mathscr{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{G}$

Heuristique - Amélioration du lemme de Steinitz

On améliore la démonstration du lemme de Steinitz.
En cherchant un invariant : comment transformer un à un les élément de $\mathscr{G}$ en élément de $\mathscr{L}$ tout en gardant la génération de E.
On démontre que pour tout $s \leqslant \operatorname{card}(\mathscr{L}) = p$ $(q = \operatorname{card}(\mathscr{G}))$:
il existe $I_s \subset \mathbb{N}_q$, tel que $\operatorname{card}(I_s) = q - s$ et
$E = \operatorname{vect}\big((e_i)_{i\in\mathbb{N}_s}, (f_j)_{j\in I_s}\big)$

Notons que la démonstration qui suit est en fait constructive !

Démonstration

Autre point de vue

Autre interprétation :

Autre point de vue

Autre interprétation :

Corollaire - Maximalité de liberté

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires de $(e_1, \ldots, e_n)$ (i.e. : $\forall\ j \in J$, $x_j \in \mathrm{vect}(e_1, e_2, \ldots e_n)$).
Si $\mathrm{Card} J \geqslant n+1$ alors nécessairement la famille $(x_j)_{j\in J}$ est liée.

Autre point de vue

Autre interprétation :

Corollaire - Maximalité de liberté

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires de $(e_1,\dots,e_n)$ (i.e. : $\forall\ j\in J$, $x_j \in \mathrm{vect}(e_1,e_2,\dots e_n)$).
Si $\mathrm{Card} J \geqslant n+1$ alors nécessairement la famille $(x_j)_{j\in J}$ est liée.

Si l'espace vectoriel possède une famille libre infinie, alors il est de dimension infinie (au sens : il n'est pas de dimension finie).

Corollaire - Espace vectoriel de dimension infinie

Il existe des espaces vectoriels de dimension infinie. C'est en particulier le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Autre point de vue

Autre interprétation :

Corollaire - Maximalité de liberté

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires de $(e_1,\dots,e_n)$ (i.e. : $\forall\ j\in J$, $x_j\in \mathrm{vect}(e_1,e_2,\dots e_n)$).
Si $\mathrm{Card} J \geqslant n+1$ alors nécessairement la famille $(x_j)_{j\in J}$ est liée.

Si l'espace vectoriel possède une famille libre infinie, alors il est de dimension infinie (au sens : il n'est pas de dimension finie).

Corollaire - Espace vectoriel de dimension infinie

Il existe des espaces vectoriels de dimension infinie. C'est en particulier le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Démonstration

Le cardinal d'une base ne dépend que de l'espace !

Théorème - Dimension constante

Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, non réduit au vecteur nul, ont même cardinal.

Le cardinal d'une base ne dépend que de l'espace !

Théorème - Dimension constante

Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, non réduit au vecteur nul, ont même cardinal.

Démonstration

Dimension

Définition - Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, non réduit au vecteur nul.
On appelle dimension de E le cardinal commun de toutes ses bases.
On le note $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$.
Par convention $\dim\{0_E\} = 0$.

Dimension

Définition - Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, non réduit au vecteur nul. On appelle dimension de E le cardinal commun de toutes ses bases.
On le note $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$.
Par convention $\dim\{0_E\} = 0$.

Exemple Compléter

- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n =$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n =$
- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] =$
- Pour $a \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, $\dim_{\mathbb{K}}\{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \mid y' + a(t)y = 0\} =$
- Pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ fixé, $a \neq 0$,
$\dim_{\mathbb{K}}\{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \mid ay'' + by' + cy = 0\} =$
- Pour $(a,b,c) \in K^3$, $a \neq 0, c \neq 0$,
$\dim_{\mathbb{K}}\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\} =$

Retour sur les cardinaux

Théorème - Conséquence sur les cardinaux

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \geqslant 1$. Alors :

- Une famille libre de E de cardinal p vérifie $p \leqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.
- Une famille génératrice de E de cardinal p vérifie $p \geqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.

Retour sur les cardinaux

Théorème - Conséquence sur les cardinaux

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \geqslant 1$. Alors :

- Une famille libre de E de cardinal p vérifie $p \leqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.
- Une famille génératrice de E de cardinal p vérifie $p \geqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.

Démonstration

Applications

Savoir-faire. Montrer qu'une famille est une base

En général pour montrer qu'une famille d'un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension** n **connue** est une base on montre qu'elle est **libre de cardinal** n. (Dans de rares cas, on montre que la famille est génératrice et du bon cardinal).

Applications

Savoir-faire. Montrer qu'une famille est une base

En général pour montrer qu'une famille d'un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension** n **connue** est une base on montre qu'elle est **libre de cardinal** n. (Dans de rares cas, on montre que la famille est génératrice et du bon cardinal).

Exemple Dans $E = \mathbb{R}^n$

Applications

Savoir-faire. Montrer qu'une famille est une base

En général pour montrer qu'une famille d'un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension** n **connue** est une base on montre qu'elle est **libre de cardinal** n. (Dans de rares cas, on montre que la famille est génératrice et du bon cardinal).

Exemple Dans $E = \mathbb{R}^n$

Exercice

Montrer que la famille des polynômes $(N_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Avec

$$N_0 = 1 \qquad \forall\, k \geqslant 1 : N_k = \frac{X \times (X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

Dimension d'un produit (cartésien d'espaces)

Théorème - Dimension d'un produit cartésien

Soient E,F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $E\times F$ est de dimension finie et

$$\dim E\times F = \dim E + \dim F.$$

Dimension d’un produit (cartésien d’espaces)

Théorème - Dimension d’un produit cartésien

Soient E,F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $E\times F$ est de dimension finie et

$$\dim E\times F = \dim E + \dim F.$$

Démonstration

Produit cartésien étendu

Par récurrence :

Corollaire - Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels

Soient $E_1,\ldots,E_k$ des $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies respectivement $n_1,\ldots,n_k$. Alors $E_1\times\cdots\times E_k$ est de dimension finie égale à $n_1+\cdots+n_k$.

$\Rightarrow$ Dimension (définition)

$\Rightarrow$ Dimension (exploitation)

Dimension d'un s.e.v

Théorème - Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Soit F un s.e.v de E.
Alors F est de dimension finie, avec $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus

$$\dim F = \dim E \text{ si et seulement si } E = F.$$

Dimension d'un s.e.v

Théorème - Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Soit F un s.e.v de E.
Alors F est de dimension finie, avec $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus

$$\dim F = \dim E \text{ si et seulement si } E = F.$$

Démonstration

Exploitation des dimensions

Savoir-faire. Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux

Pour montrer que deux $\mathbb{K}$-e.v. E et F de **dimension finie** sont égaux, on montre généralement une inclusion et l'égalité des dimensions.

Exploitation des dimensions

Savoir-faire. Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux

Pour montrer que deux $\mathbb{K}$-e.v. E et F de **dimension finie** sont égaux, on montre généralement une inclusion et l'égalité des dimensions.

Corollaire. S.e.v. de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, autres que $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\mathbb{R}^2$, sont les droites vectorielles.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, autres que $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\mathbb{R}^3$, sont les droites vectorielles et les plans vectoriels.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle rang de la famille $(x_1,\ldots,x_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(x_1,\ldots,x_p)$:

$$\mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_p) = \dim \mathrm{vect}(x_1,\ldots,x_p)$$

Rang d'une famille de vecteurs

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle rang de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_p)$:

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_p)$$

Comme $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_p)$, on peut affirmer

Proposition Majorant

$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant p$. Et

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = p \,(\Rightarrow) \Longrightarrow (x_1, \dots, x_p) \text{ est libre}$$

Sommes et supplémentaires

Théorème - Base et dimension d'une somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, E_1 et E_2 deux s.e.v de E
Soient $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de E_1 et $(f_1,\ldots,f_q)$ une base de E_2.
Alors E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $(e_1,\ldots,e_p,f_1,\ldots,f_q)$ (juxtaposition des bases de E_1 et E_2) est libre.
Dans ce cas c'est une base de $E_1 \oplus E_2$ et on a

$$\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Le résultat se généralise à plus de deux s.e.v.

Sommes et supplémentaires

Théorème - Base et dimension d'une somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, E_1 et E_2 deux s.e.v de E
Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E_1 et $(f_1, \ldots, f_q)$ une base de E_2.
Alors E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ (juxtaposition des bases de E_1 et E_2) est libre.
Dans ce cas c'est une base de $E_1 \oplus E_2$ et on a

$$\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Le résultat se généralise à plus de deux s.e.v.

Démonstration

Caractérisation de (F,G)

Théorème - Caractérisation des couples de s.e.v supplémentaires

Soient E un e.v. de dimension finie n et F,G deux s.e.v de E. Alors

- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = n$;
- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F + G = E$ et $\dim F + \dim G = n$;
  - $E = F \oplus G$

    $\Leftrightarrow$ la juxtaposition d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

Caractérisation de (F,G)

Théorème - Caractérisation des couples de s.e.v supplémentaires

Soient E un e.v. de dimension finie n et F,G deux s.e.v de E. Alors

- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = n$;
- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F + G = E$ et $\dim F + \dim G = n$;
- $E = F \oplus G$

  $\Leftrightarrow$ la juxtaposition d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

Exercice

Montrer que dans $\mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{vect}((1,2,-1,0),(0,2,0,1))$ et $G = \mathrm{vect}((2,0,0,1),(1,0,0,1))$ sont supplémentaires.

Caractérisation de (F,G)

Théorème - Caractérisation des couples de s.e.v supplémentaires

Soient E un e.v. de dimension finie n et F,G deux s.e.v de E. Alors

- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = n$;
- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F + G = E$ et $\dim F + \dim G = n$;
  - $E = F \oplus G$
    $\Leftrightarrow$ la juxtaposition d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

Exercice

Montrer que dans $\mathbb{R}^4$, $F = \text{vect}((1,2,-1,0),(0,2,0,1))$ et $G = \text{vect}((2,0,0,1),(1,0,0,1))$ sont supplémentaires.

Démonstration

Existence d'un supplémentaire

Remarque - Famille libre $F \Cap G = \emptyset$ & Famille génératrice : $F + G = E$.

Existence d'un supplémentaire

Remarque - Famille libre $F \Cap G = \emptyset$ & Famille génératrice : $F + G = E$.

Théorème - Existence de supplémentaires en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F un s.e.v de E. Alors F admet au moins un supplémentaire dans E.

Existence d'un supplémentaire

Remarque - Famille libre $F \Cap G = \emptyset$ & Famille génératrice : $F + G = E$.

Théorème - Existence de supplémentaires en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F un s.e.v de E. Alors F admet au moins un supplémentaire dans E.

Démonstration

Exercice

Remarque Processus algorithmique

Exercice

Remarque Processus algorithmique

Exercice

Donner **un** supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $F = \text{vect}((1,1,1,1),(2,0,1,1),(-2,4,1,1))$

Formule de Grassman

Théorème - Dimension d'une somme de deux s.e.v., relation de Grassman

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F, G deux s.e.v de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Formule de Grassman

Théorème - Dimension d'une somme de deux s.e.v., relation de Grassman

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F,G deux s.e.v de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration

Dimension d'une somme

Théorème - Dimension et somme d'espaces vectoriels

Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des s.e.v. de dimension finie de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors

$$\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Dimension d'une somme

Théorème - Dimension et somme d'espaces vectoriels

Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des s.e.v. de dimension finie de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors

$$\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration

Droite et plan vectoriels

Définition - Droite et plan vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque et soit F un s.e.v de E. On dit que

- F est une droite (vectorielle) si $\dim F = 1$;
- F est un plan (vectoriel) si $\dim F = 2$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Dimension (définition)

$\Rightarrow$ Dimension (exploitation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Dimension (définition)

- Un espace est de dimension finie, lorsqu'il admet une famille une famille génératrice finie

Conclusion

Objectifs

⇒ Dimension (définition)

- Un espace est de dimension finie, lorsqu'il admet une famille une famille génératrice finie
- Dans ce cas, toutes les bases (nombreuses ! !) ont le même cardinal, qui ne dépend que de E, appelé dimension de E

Conclusion

Objectifs

⇒ Dimension (définition)

- Un espace est de dimension finie, lorsqu'il admet une famille une famille génératrice finie
- Dans ce cas, toutes les bases (nombreuses ! !) ont le même cardinal, qui ne dépend que de E, appelé dimension de E
- On a un processus constructif à partir d'une famille libre et d'une famille génératrice pour former une base de E (contenant toute la famille libre). C'est le lemme de Steinitz ou théorème de la base incomplète

Conclusion

Objectifs

⇒ Dimension (définition)

- Un espace est de dimension finie, lorsqu'il admet une famille une famille génératrice finie
- Dans ce cas, toutes les bases (nombreuses ! !) ont le même cardinal, qui ne dépend que de E, appelé dimension de E
- On a un processus constructif à partir d'une famille libre et d'une famille génératrice pour former une base de E (contenant toute la famille libre). C'est le lemme de Steinitz ou théorème de la base incomplète
- Exemples de dimension d'espace vectoriel classique, dont le produit cartésien.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Dimension (définition)

$\Rightarrow$ Dimension (exploitation)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Dimension (définition)

$\Rightarrow$ Dimension (exploitation)

- Réciproquement, si l'on connait la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaitre une base.

Conclusion

Objectifs

⇒ Dimension (définition)

⇒ Dimension (exploitation)

- Réciproquement, si l'on connait la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaitre une base.
- Réciproquement, si l'on connait la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaitre deux espaces supplémentaires.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Dimension (définition)

$\Rightarrow$ Dimension (exploitation)

- Réciproquement, si l'on connait la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaitre une base.
- Réciproquement, si l'on connait la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaitre deux espaces supplémentaires.
- Formule de Grassman : $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Dimension (définition)

⇒ Dimension (exploitation)

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
    3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
- Exercice n° 513 & 517