Devoir Surveillé n°1

Sujet donné le samedi 28 septembre 2024, 3h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Exercice - Autour des sommes partielles de la série harmonique

Pour tout n entier naturel non nul, on introduit la suite dite des sommes harmoniques,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier certaines formules liées à la somme harmonique H_n. Les deux parties sont indépendantes.

I . Première application

Il existe une relation de récurrence classique (notée $(\star)$ ici) qui intervient lors du calcul du temps moyen d'exécution de différents algorithmes informatiques. On cherche dans cette partie à résoudre cette relation de récurrence. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$C_0 = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(n-1+C_{k-1}+C_{n-k}\Big) \qquad (\star)$$

I.1. Montrer que pour $n \geqslant 1$,

$$C_n = n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} C_i$$

I.2. En simplifiant la quantité $nC_n-(n-1)C_{n-1}$, vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad nC_n = 2n-2+(n+1)C_{n-1}$$

I.3. Déterminer alors la relation de récurrence suivie par la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $D_n = \dfrac{C_n}{n+1}$.

I.4. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2(k-1)}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k+1}+\dfrac{b}{k}$.

I.5. En déduire une expression de C_n faisant intervenir H_n.

II . Autres sommes liées à H_n

II.1. (a) En transformant $\dfrac{1}{k}\dbinom{n}{k-1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}$.

(b) En déduire, par récurrence, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = H_n$.

II.2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Posons $W_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\ /\ i<j}\frac{1}{j-i}$.

(a) Montrer que $W_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} H_i$.

(b) En déduire, en calculant différemment la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} H_j$, une expression de W_n en fonction de H_n et n.

Problème - Méthode de Héron

Dans tout le problème, on note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ des nombres complexes inversibles.
On étudie dans ce problème un algorithme connu depuis l'antiquité pour calculer une racine carrée. Nous prenons une condition initiale pouvant être complexe afin de faire émerger les racines (carrées en partie I ou cubiques en partie III) de l'unité, voire de tout nombre complexe non nul (en partie II).

I . Racines de l'unité

On note $\Phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.
Dans cette partie, on étudie les suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par la relation

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = \Phi(z_n)$$

Et la condition initiale $z_0 = Z$, où Z est un nombre complexe quelconque et non nul ($Z \in \mathbb{C}^*$).

I.1. Image et antécédent pour Φ.

(a) Montrer que, pour tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$, on a les équivalences : $\Phi(z) = -1 \iff z = -1$ et $\Phi(z) = 1 \iff z = 1$.

(b) Montrer que, pour tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$, si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $\mathrm{Re}(\Phi(z)) = 0$.

(c) Quels sont les antécédents de 0 par Φ ?

On suppose dans les questions 2. et 3. que la suite (z_n) n'a pas de problème de définition. On étudiera cette éventualité en 4.

I.2. Expression explicite de z_n.

(a) Déduire de l'étude de Φ précédente, que si $Z \neq -1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq -1$.
On admet de même : si $Z \neq 1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq 1$.

On considère, pour la suite de cette partie, que $Z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$ et on note $\gamma = \dfrac{Z-1}{Z+1}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{z_{n+1}-1}{z_{n+1}+1} = \left(\frac{z_n - 1}{z_n + 1}\right)^2$$

(c) Montrer que l'on a $\dfrac{z_3 - 1}{z_3 + 1} = \left(\dfrac{Z-1}{Z+1}\right)^8 = \gamma^8$.

(d) Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$, en fonction de γ.
Puis expliciter directement z_n en fonction d'une fraction rationnelle d'une puissance de γ.

I.3. Convergence et bassin d'attraction.

(a) Donner une interprétation géométrique dans le plan complexe de la condition $\left|\dfrac{Z-1}{Z+1}\right| < 1$.
En déduire que si $\mathrm{Re}(Z) > 0$, alors (z_n) converge et $\lim(z_n) = 1$.

(b) Expliquer rapidement (en justifiant une adaptation de la stratégie précédente) ce qui se passe pour $\mathrm{Re}(Z) < 0$.

On dit que (z_n) est mal définie si il existe un entier m tel que $z_m = 0$ (problème de division par zéro pour calculer z_{m+1}).

I.4. Problème de définition.

(a) Montrer que (z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$ tels que $\gamma = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^m}}$.

(b) Montrer que (z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$ tels que $Z = i \operatorname{cotan} \dfrac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}$.

II . Racines carrées de a

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Soit $\delta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\delta^2 = a$. On note $\Phi_a : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{a}{z}\right)$.

II.1. Justifier l'existence de δ. Est-il unique ?

Comme pour la partie précédente, on considère un complexe V de $\mathbb{C}^*$.
Puis, on définit - si possible - pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, en posant :

$$v_0 = V \qquad \text{et} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \Phi_a(v_n)$$

On note $N = \{n \in \mathbb{N} \mid v_n \text{ bien défini}\}$.

II.2. Montrer qu'en posant, pour tout entier $n \in N$, $z_n = \dfrac{v_n}{\delta}$, on a la relation de récurrence

$$\forall\ n \in N \quad : \quad n+1 \in N \quad \Rightarrow \quad z_{n+1} = \Phi(z_n)$$

II.3. Exploitation de la première partie.

(a) En exploitant I.3., montrer que si $\mathrm{Re}(\overline{\delta}V) > 0$, alors, $N = \mathbb{N}$ et $(v_n) \to \delta$.
Montrer que si $\mathrm{Re}(\overline{\delta}V) < 0$, alors $N = \mathbb{N}$ et $(v_n) \to -\delta$.

(b) Donner une interprétation géométrique dans le plan complexe de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \mathrm{Re}(\overline{\delta}z) > 0\}$.

(c) Montrer que (v_n) est mal définie si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$ tels que $V = i\,\delta\,\mathrm{cotan}\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}$.

II.4. Approximation informatique de $\sqrt{2}$.

(a) Soit $s > 0$.
Montrer que si $|s^2 - 2| \leqslant 10^{-k}$, alors $|s - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-k}$.

(b) Ecrire une fonction `approx(n)` codée dans le langage de votre choix, prenant n comme argument et renvoyant une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près à l'aide de la suite étudiée dans cette partie.

III . Méthode de Newton et approximation de j

L'algorithme de Newton permet d'obtenir une valeur approchée d'une des racines du polynôme P. Il s'agit de considérer la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$$

et une condition u_0 bien choisie.

III.1. Montrer qu'en considérant $P_a : x \mapsto x^2 - a$, on obtient par l'algorithme de Newton, la suite de Héron (z_n) définie dans les deux parties précédentes.

III.2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quelle est la relation de récurrence obtenue si l'on cherche une racine p-ième du nombre a (qui peut être complexe) ? On considérera un polynôme P, à coefficients entiers, de degré p.

III.3. On considère la suite (z_n) définie par z_0 tel que $|z_0 - j| \leqslant \dfrac{1}{5}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2z_n + \dfrac{1}{z_n^2}\right)$ et on admet qu'elle est bien définie.

(a) À quel polynôme P est associée la nouvelle suite (z_n). Conjecturer les valeurs éventuelles attentues comme limite de (z_n) sous hypothèse de convergence ?

(b) On note, pour tout entier n, $U_n = z_n - j$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \dfrac{2z_n + j}{3z_n^2} \times U_n^2$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n - j| \leqslant \dfrac{1}{5} \Rightarrow |z_{n+1} - j| \leqslant \dfrac{1}{2}|z_n - j|$.

On pourra commencer par encadrer $|z_n|$ sous l'hypothèse $|z_n - j| \leqslant \dfrac{1}{5}$.

(d) En déduire, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n - j| \leqslant \dfrac{1}{5 \times 2^n}$.
Qu'en déduit-on ?

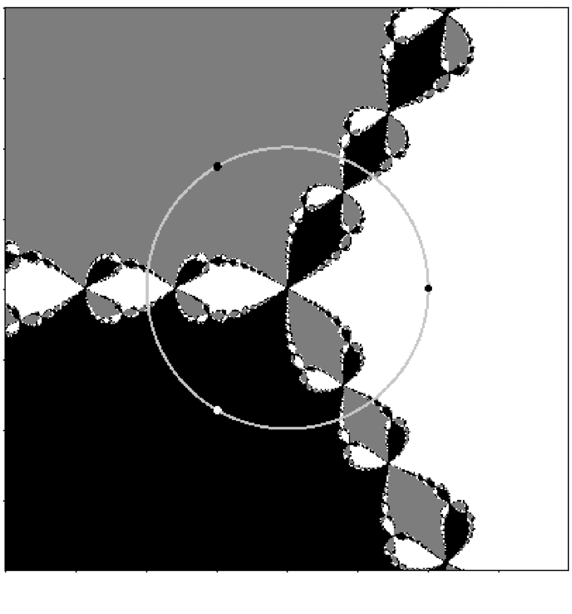
La suite précédente (z_n) converge, dans « la plupart des cas »vers l'une des racines troisième de l'unité (marquées sur le cercle dans la figure). La limite de cette suite dépend du point z_0 considéré en germe. Le schéma suivant représente, grâce à un calcul informatique les « bassins d'attraction »des trois limites :

— en blanc, les germes z_0 tel que $(z_n) \to 1$,

— en gris, les germes z_0 tel que $(z_n) \to j$,

— en noir, les germes z_0 tel que $(z_n) \to j^2$,

Les quelques points z_0 qui conduisent à une suite mal définie ne sont pas visibles ici.



DEVOIR SURVEILLE 1 - Correction

Exercice - Autour des sommes partielles de la série harmonique

Pour tout n entier naturel non nul, on introduit la suite dite des sommes harmoniques,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier certaines formules liées à la somme harmonique H_n. Les deux parties sont indépendantes.

I . Première application

Il existe une relation de récurrence classique (notée $(\star)$ ici) qui intervient lors du calcul du temps moyen d'exécution de différents algorithmes informatiques. On cherche dans cette partie à résoudre cette relation de récurrence. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$C_0 = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(n-1+C_{k-1}+C_{n-k}\Big) \qquad (\star)$$

I.1. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $C_n = n-1+\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i$.

Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(n-1+C_{k-1}+C_{n-k}\Big)\\
&= \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(n-1)}_{=n(n-1)} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}}_{\substack{=\sum_{i=0}^{n-1}C_i \\ \text{en posant } i=k-1}} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}}_{\substack{=\sum_{i=0}^{n-1}C_i \\ \text{en posant } i=n-k}}\\
&= (n-1)+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}C_i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 1,\ C_n = n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}C_i.}$$

I.2. En simplifiant la quantité $nC_n-(n-1)C_{n-1}$, vérifier que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad nC_n = 2n-2+(n+1)C_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- Si $n=1$, en utilisant la formule de la question précédente,

$$C_1 = 1-1+\frac{2}{1}C_0 = 0 \qquad \text{car } C_0 = 0.$$

  Par ailleurs, $2\times 1-2+(1+1)C_{1-1} = 0 = 1\times C_1$ donc la formule cherchée est vraie pour $n=1$.
- Si $n \geqslant 2$, on peut exprimer C_n et C_{n-1} en utilisant la formule de la question précédente,

$$\begin{aligned}
nC_n-(n-1)C_{n-1} &= n(n-1)+2\sum_{i=0}^{n-1}C_i-(n-1)(n-2)-2\sum_{i=0}^{n-2}C_i\\
&= 2(n-1)+2C_{n-1}
\end{aligned}$$

  donc $nC_n = 2n-2+2C_{n-1}+(n-1)C_{n-1} = 2n-2+(n+1)C_{n-1}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ nC_n = 2n-2+(n+1)C_{n-1}.}$$

I.3. Déterminer alors la relation de récurrence suivie par la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $D_n = \dfrac{C_n}{n+1}$.

- Puisque $C_0=0$, $D_0=0$.
- En divisant par $n(n+1)$ pour $n \geqslant 1$ la relation prouvée dans la question précédente,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \frac{C_n}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}+\frac{C_{n-1}}{n}$$

  donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ D_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}+D_{n-1}$$

Ainsi, la suite (D_n) est définie par $D_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \dfrac{2(n-1)}{n(n+1)} + D_{n-1}$.

I.4. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2(k-1)}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k}$.

Posons $a = 4$ et $b = -2$.
Calculons

$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k} = \frac{4}{k+1} + \frac{-2}{k} = \frac{4k-2k-2}{k(k+1)} = \frac{2(k-1)}{k(k+1)}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2(k-1)}{k(k+1)} = \dfrac{4}{k+1} + \dfrac{-2}{k}$.

Rmq : la détermination des valeurs de a et b peut se faire au brouillon en remarquant que

$$\frac{2(k-1)}{k(k+1)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k} \iff \frac{2(k-1)}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+b}{k(k+1)}$$

ce qui équivant à $2k-2 = (a+b)k+b$. Cette relation devant être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on cherche alors a et b tels que
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

I.5. En déduire une expression de C_n faisant intervenir H_n.

Soit $n \geqslant 2$.

$$D_n - D_1 = D_n - D_{n-1} + D_{n-1} - D_{n-2} + \ldots + D_2 - D_1 = \sum_{k=2}^{n} (D_k - D_{k-1})$$

d'où, puisque $D_1 = \dfrac{C_1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$,

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=2}^{n} (D_k - D_{k-1}) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2(k-1)}{k(k+1)} \quad \text{(question 6)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{4}{k+1} + \frac{-2}{k} \right) \quad \text{(question 7)} \\ &= 4\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= 4\left(\frac{1}{n+1} + H_n - \frac{1}{2} - 1 \right) - 2(H_n - 1) \\ &= \frac{4}{n+1} + 2H_n - 4 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $n \geqslant 2$, $C_n = (n+1)D_n = 2(n+1)H_n - 4(n+1) + 4 = 2(n+1)H_n - 4n$.

II . Autres sommes liées à H_n

II.1. (a) En transformant $\dfrac{1}{k}\dbinom{n}{k-1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}$.

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$ fixé.

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{k}\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$$

Cette relation permet de transformer la somme étudiée :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k} \\ &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k \times 1^{n+1-k} \end{aligned}$$

On reconnaît presque un développement avec la formule du binôme de Newton au terme correspondant à la valeur 0 de l'indice k près si bien que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1} &= -\frac{1}{n+1}\left((-1+1)^{n+1} - \binom{n+1}{0}(-1)^0 \times 1^{n+1-0}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}.}$$

(b) En déduire, par récurrence, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = H_n$.

Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(n) : « \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = H_n »$$

- D'une part, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{1}{k} = \frac{(-1)^{1-1}}{1}\binom{1}{1} = 1$ et d'autre part $H_1 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] \quad \text{en utilisant la relation de Pascal}\\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}}_{= \frac{1}{n+1} \text{ (question II.1.(a))}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}}_{= H_n \text{ car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}\\ &= H_{n+1}\end{aligned}$$

  Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = H_n.}$$

II.2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Posons $\displaystyle W_n = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \,/\, i<j} \frac{1}{j-i}$.

(a) Montrer que $\displaystyle W_n = \sum_{i=1}^{n-1} H_i$.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \,/\, i<j} \frac{1}{j-i} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{j-i}\\ &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{j-i}\right)\\ &= \sum_{j=2}^{n}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}\right)}_{= H_{j-1}} \quad \text{en posant } k = j-i\\ &= \sum_{p=1}^{n-1} H_p \quad \text{en posant } p = j-1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } W_n = \sum_{i=1}^{n-1} H_i.}$$

(b) En déduire, en calculant différemment la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} H_j$, une expression de W_n en fonction de H_n et n.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} H_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}\right) = \sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\sum_{j=k}^{n}1\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{k}\\
&= (n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}1 \quad \text{car } \frac{n-k+1}{k}=(n+1)\times\frac{1}{k}-1\\
&= (n+1)H_n - n
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $W_n = \sum_{j=1}^{n-1} H_j = -H_n + \sum_{j=1}^{n} H_j$ si bien que

$$\boxed{W_n = n(H_n - 1).}$$

Problème - Méthode de Héron

Dans tout le problème, on note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ des nombres complexes inversibles.
On étudie dans ce problème un algorithme connu depuis l'antiquité pour calculer une racine carrée. Nous prenons une condition initiale pouvant être complexe afin de faire émerger les racines (carrées en partie I ou cubiques en partie III) de l'unité, voire de tout nombre complexe non nul (en partie II).

I . Racines de l'unité

On note $\Phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.
Dans cette partie, on étudie les suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par la relation

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = \Phi(z_n)$$

Et la condition initiale $z_0 = Z$, où Z est un nombre complexe quelconque et non nul ($Z \in \mathbb{C}^*$).

I.1. Image et antécédent pour Φ.

(a) Montrer que, pour tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$, on a les équivalences : $\Phi(z) = -1 \iff z = -1$ et $\Phi(z) = 1 \iff z = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\Phi(z) = -1 \iff \quad z+\frac{1}{z} = -2 \underset{\Leftarrow \text{ car } z\neq 0}{\iff} z^2+2z+1 = 0 \iff (z+1)^2 = 0 \iff z = -1$$

$$\Phi(z) = 1 \iff \quad z+\frac{1}{z} = 2 \underset{\Leftarrow \text{ car } z\neq 0}{\iff} z^2-2z+1 = 0 \iff (z-1)^2 = 0 \iff z = 1$$

$$\boxed{\forall\, z\in\mathbb{C}^*, \qquad \Phi(z) = -1 \Leftrightarrow z = -1 \qquad \text{et} \qquad \Phi(z) = 1 \Leftrightarrow z = 1}$$

(b) Montrer que, pour tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$, si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $\mathrm{Re}(\Phi(z)) = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Supposons que $\mathrm{Re}(z) = 0$, donc $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z) = 0$.
Par $\mathbb{R}$-linéarité de Re :

$$\mathrm{Re}(\Phi(z)) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}(\overline{z})\right) = 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout complexe } z\in\mathbb{C}^*, \text{ si } \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ alors } \mathrm{Re}(\Phi(z)) = 0.}$$

(c) Quels sont les antécédents de 0 par Φ ?

On cherche $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Phi(z) = 0$. On a donc $z + \frac{1}{z} = 0$.
En multipliant par z, on trouve que nécessairement : $z^2 = -1$, et donc $z = i$ ou $z = -i$.
Réciproquement, si $z = i$, alors $\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(i+\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{2}(i-i) = 0$.
si $z = -i$, alors $\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(-i+\frac{1}{-i}\right) = \frac{1}{2}(-i+i) = 0$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des antécédents de 0 par } \Phi \text{ est } \Phi^{-1}(\{0\}) = \{i,-i\}.}$$

On suppose dans les questions 2. et 3. que la suite (z_n) n'a pas de problème de définition. On étudiera cette éventualité en 4.

I.2. Expression explicite de z_n.

(a) Déduire de l'étude de Φ précédente, que si $Z \neq -1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq -1$.

On démontre ce résultat par récurrence. Supposons donc que $Z \neq -1$.
Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $z_n \neq -1$ ».
— $\mathcal{P}_0$ est vraie car $z_0 = Z \neq -1$, par hypothèse.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Alors $z_n \neq -1$. On a vu en I.1.(a) que si $\Phi(z) = -1$, alors $z = -1$,
donc par contraposée si $z \neq -1$ alors $\Phi(z) \neq -1$.
Ainsi, en prenant $z \leftarrow z_n \neq -1$, alors $\Phi(z) = \Phi(z_n) = z_{n+1} \neq -1$.
L'hérédité est prouvée.
La récurrence est démontée, ce qui donne le résultat attendu :

$$\boxed{\text{si } Z \neq -1, \text{ alors pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ z_n \neq -1.}$$

On aurait également pu raisonne par l'absurde, en considérant $I = \{n \in \mathbb{N} \mid z_n = -1\}$.
Supposons que $I \neq \emptyset$. I est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément i_0.
Ou bien $i_0 = 0$, et donc $z_0 = Z = -1$. Impossible.
Ou bien $i_0 > 0$, et donc $z_{i_0} = \Phi(i_{i_0-1}) = -1$.
D'après la question I.1.(a), $i_0 - 1 \in I$. On a trouvé dans I un élément plus petit que i_0.
Tout cela est absurde et donc I est vide, et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq -1$.

On admet de même : si $Z \neq 1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq 1$.

On considère, pour la suite de cette partie, que $Z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$ et on note $\gamma = \dfrac{Z-1}{Z+1}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{z_{n+1}-1}{z_{n+1}+1} = \left(\frac{z_n - 1}{z_n + 1}\right)^2$$

D'après la question précédente, l'hypothèse $Z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$ garantit que $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_k \neq -1$ si bien que les deux quotients qui interviennent dans cette question sont bien définis.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on reprend des calculs déjà vus :

$z_{n+1} - 1 = \Phi(z_n) - 1 = \dfrac{z_n^2 - 2z_n + 1}{2z_n} = \dfrac{(z_n-1)^2}{2z_n}$.

$z_{n+1} + 1 = \Phi(z_n) + 1 = \dfrac{z_n^2 + 2z_n + 1}{2z_n} = \dfrac{(z_n+1)^2}{2z_n}$.

En divisant, on a la simplification (par $z_n, \neq 0$, car l'énoncé fait dans cette question l'hypothèse que la suite est bien définie) :

$$\boxed{\frac{z_{n+1}-1}{z_{n+1}+1} = \left(\frac{z_n - 1}{z_n + 1}\right)^2}$$

(c) Montrer que l'on a $\dfrac{z_3 - 1}{z_3 + 1} = \left(\dfrac{Z-1}{Z+1}\right)^8 = \gamma^8$.

On a donc en particulier, pour $n = 2$, puis $n = 1$ et $n = 0$:

$$\frac{z_3-1}{z_3+1} = \left(\frac{z_2-1}{z_2+1}\right)^2 = \left(\left(\frac{z_1-1}{z_1+1}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{z_1-1}{z_1+1}\right)^4 = \left(\left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)^8$$

Ainsi, en remplaçant z_0 par sa valeur : Z

$$\boxed{\frac{z_3-1}{z_3+1} = \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^8 = \gamma^8}$$

(d) Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$, en fonction de γ.
Puis expliciter directement z_n en fonction d'une fraction rationnelle d'une puissance de γ.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1} = \gamma^{2^n}$ »

— $\dfrac{z_0 - 1}{z_0 + 1} = \dfrac{Z-1}{Z+1} = \gamma = \gamma^1 = \gamma^{2^0}$.
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors avec la relation trouvée en (b) et $\mathcal{P}_n$:

$$\frac{z_{n+1}-1}{z_{n+1}+1} = \left(\frac{z_n-1}{z_n+1}\right)^2 = \left(\gamma^{2^n}\right)^2 = \gamma^{2^n \times 2} = \gamma^{2^{n+1}}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ \frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \gamma^{2^n}.}$$

On notera bien que γ^{2^n} se lit $\gamma^{(2^n)}$ et non $\left(\gamma^2\right)^n$, ce dernier est en fait égal à γ^{2n}...
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n - 1 = \gamma^{2^n}(z_n + 1)$, donc $z_n(1 - \gamma^{2^n}) = 1 + \gamma^{2^n}$.
Or si $1 - \gamma^{2^n} = 0$, alors d'une part $\gamma^{2^n} = 1$ et d'autre part $1 + \gamma^{2^n} = z_n(1 - \gamma^{2^n}) = 0$ donc $\gamma^{2^n} = -1$ si bien que $1 = -1$ ce qui est une contradiction. Ainsi, $1 - \gamma^{2^n} \neq 0$ d'où

$$\boxed{z_n = \frac{1 + \gamma^{2^n}}{1 - \gamma^{2^n}}}$$

I.3. Convergence et bassin d'attraction.

(a) Donner une interprétation géométrique dans le plan complexe de la condition $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| < 1$.
En déduire que si $\mathrm{Re}(Z) > 0$, alors (z_n) converge et $\lim(z_n) = 1$.

Notons M, le point d'affixe Z, I, le point d'affixe 1 et J d'affixe -1.
On a l'interprétation géométrique :

$$\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| < 1 \iff |Z - 1| < |Z + 1| \iff IM < JM$$

(IM désigne la longueur du segment $[IM]$, à savoir la distance de I à M, ou encore la norme du vecteur $\overrightarrow{IM}$.)
Ainsi l'ensemble des points M d'affixe Z tel que $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| < 1$ est l'ensemble des points plus proches de $I(1)$ que de $J(-1)$.
Or les points à égale distance sont les points de la médiatrice de $[JI]$, c'est-à-dire, les points de l'axe des imaginaires purs.
Par conséquent (il s'agit bien d'une double inclusion d'ensembles) :

$$\boxed{\text{L'ensemble des } M(Z) \text{ tel que } \left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| < 1 \text{ est l'ensemble des points dont l'affixe a une partie réelle positive strictement.}}$$

On peut aussi raisonner algébriquement, en notant $Z = a + ib$. On a les équivalences :

$$\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| < 1 \iff \left|\frac{Z-1}{Z+1}\right|^2 < 1 \iff (a-1)^2 + b^2 < (a+1)^2 + b^2 \iff -2a < 2a \iff a > 0$$

Continuons la réponse à la question :
Il en résulte que : $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| < 1 \iff \mathrm{Re}(Z) > 0$.
Dans ce cas : $\mathrm{Re}(Z) > 0$, on a $|\gamma| < 1$ et pour $m = 2^n > n$ (par décroissance de la suite géométrique) : $0 \leqslant |\gamma|^{2^n} \leqslant |\gamma|^n$,
par comparaison de suites convergentes vers 0 : $(\gamma^{2^n})_n$ converge également vers 0.
Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{1 + \gamma^{2^n}}{1 - \gamma^{2^n}}$. Et ainsi, par addition, puis division :

$$\boxed{(z_n) \text{ converge et } \lim(z_n) = \frac{1+0}{1-0} = 1.}$$

(b) Expliquer rapidement (en justifiant une adaptation de la stratégie précédente) ce qui se passe pour $\mathrm{Re}(Z) < 0$.

On considère $\delta = \frac{Z+1}{Z-1}$, on a de même Z $< 0 \iff |\delta| < 1$.
Par ailleurs, on a la relation, pour tout entier n : $\frac{z_{n+1} + 1}{z_{n+1} - 1} = \frac{z_n + 1}{z_n - 1}$ et par récurrence : $\frac{z_n + 1}{z_n - 1} = \delta^{2^n}$.
Finalement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{-1 - \delta^{2^n}}{1 - \delta^{2^n}} = \frac{\delta^{2^n} + 1}{\delta^{2^n} - 1}$.

$$\boxed{\text{Dans le cas } \mathrm{Re}(Z) < 0,\ (\delta^{2^n}) \to 0 \text{ et par addition et division, } (z_n) \text{ converge et } \lim z_n = -1.}$$

On dit que (z_n) est mal définie si il existe un entier m tel que $z_m = 0$ (problème de division par zéro pour calculer z_{m+1}).

I.4. Problème de définition.

(a) Montrer que (z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$ tels que $\gamma = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^m}}$.

Puisque $z_0 = Z \in \mathbb{C}^*$, on n'a jamais $z_0 = 0$. Ainsi :
(z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $z_m = 0$.
L'ensemble $M = \{m \in \mathbb{N}^* \mid z_m = 0\}$ est soit vide (suite bien définie), soit admet un plus petit élément $m_0 \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, pour tout $n \leqslant m_0$, z_n est bien définie et la relation $z_n = \dfrac{1+\gamma^{2^n}}{1-\gamma^{2^n}}$ reste vraie.

Et donc (z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1+\gamma^{2^{m_0}}}{1-\gamma^{2^{m_0}}} = z_{m_0} = 0$ donc $1+\gamma^{2^{m_0}} = 0$.

On ainsi les équivalences :

(z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\gamma^{2^m} = -1 = e^{i\pi}$,

(z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que γ est une racine 2^m-ième de $-1 = e^{i\pi}$,

(z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{\gamma}{e^{i\frac{\pi}{2^m}}}$ est une racine 2^m-ième de l'unité,

(z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m-1]\!]$ tels que $\dfrac{\gamma}{e^{i\frac{\pi}{2^m}}} = e^{\frac{2ik\pi}{2^m}} \iff \gamma = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^m}}$.

$$\boxed{(z_n) \text{ est mal définie si et seulement s'il existe } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \in [\![0, 2^m-1]\!] \text{ tels que } \gamma = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^m}}.}$$

(b) Montrer que (z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m-1]\!]$ tels que $Z = i\,\text{cotan}\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}$.

On prolonge la réponse à la question précédente, en se souvenant que :

$\gamma = \dfrac{Z-1}{Z+1}$, donc $\gamma Z + \gamma = Z - 1$, ou encore $Z = \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$ ($\gamma \neq 1$ sinon $1 = -1$).

On peut donc (par homographie qui admet une réciproque) écrire l'équivalence : $\gamma = \dfrac{Z-1}{Z+1} \iff Z = \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$,

et ainsi transférer la propriété d'équivalence d'une condition sur γ à une condition (équivalente) sur Z.

Finalement on a :

(z_n) est mal définie si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m-1]\!]$ tels que $Z \left(= \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right) = \dfrac{1+e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^m}}}{1-e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^m}}}$.

Un calcul classique donne :

$$\frac{1+e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^m}}}{1-e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^m}}} = \frac{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}}}{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}}} \times \frac{e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}} + e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}}}{e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}} - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}}} = \frac{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}\right)}{-2i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}\right)} = i\,\text{cotan}\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}$$

$$\boxed{(z_n) \text{ est mal définie si et seulement s'il existe } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \in [\![0, 2^m-1]\!] \text{ tels que } Z = i\,\text{cotan}\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}.}$$

II . Racines carrées de a

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Soit $\delta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\delta^2 = a$. On note $\Phi_a : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{a}{z}\right)$.

II.1. Justifier l'existence de δ. Est-il unique ?

On sait que tout complexe non nul admet deux racines carrées qui sont opposées : en mettant a sous forme exponentielle $a = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, $\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$ en est une et l'autre est $-\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$.

$$\boxed{\delta \text{ existe toujours } (a \neq 0) \text{ mais il n'est pas unique.}}$$

Comme pour la partie précédente, on considère un complexe V de $\mathbb{C}^*$.

Puis, on définit - si possible - pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, en posant :

$$v_0 = V \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \Phi_a(v_n)$$

On note $N = \{n \in \mathbb{N} \mid v_n \text{ bien défini}\}$.

II.2. Montrer qu'en posant, pour tout entier $n \in N$, $z_n = \dfrac{v_n}{\delta}$, on a la relation de récurrence

$$\forall\, n \in N \quad : \quad n+1 \in N \quad \Rightarrow \quad z_{n+1} = \Phi(z_n)$$

Si n est un rang tel que v_n et v_{n+1} existent, alors

$$\boxed{z_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{\delta} = \frac{1}{2\delta}\left(v_n + \frac{\delta^2}{v_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{\delta} + \frac{\delta}{v_n}\right) = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right) = \Phi(z_n)}$$

II.3. Exploitation de la première partie.

(a) En exploitant I.3., montrer que si $\mathrm{Re}(\overline{\delta}V) > 0$, alors, $N = \mathbb{N}$ et $(v_n) \to \delta$.
Montrer que si $\mathrm{Re}(\overline{\delta}V) < 0$, alors $N = \mathbb{N}$ et $(v_n) \to -\delta$.

Comme v_n s'annule si et seulement si z_n s'annule, la suite (v_n) est définie pour les mêmes rangs que la suite (z_n). On a vu en I.3 que si $\mathrm{Re}(z_0) > 0$, la suite (z_n) est bien définie et converge vers 1. Comme

$$\mathrm{Re}(z_0) = \mathrm{Re}\Big(\frac{v_0}{\delta}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\overline{\delta}\frac{v_0}{\delta\overline{\delta}}\Big) = \frac{1}{|\delta|^2}\mathrm{Re}\big(\overline{\delta}V\big) \quad \text{car } |\delta|^2 \text{ est un réel strictement positif}$$

Si $\mathrm{Re}(\overline{\delta}V) > 0$, $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ donc $(z_n) = (\frac{v_n}{\delta})$ est bien définie et converge vers 1 et, par conséquent,

$$\boxed{\text{si } \mathrm{Re}(\overline{\delta}V) > 0,\ (v_n) \text{ est bien définie et converge vers } \delta.}$$

A contrario, si $\mathrm{Re}(\overline{\delta}V) < 0$, on a $\mathrm{Re}(z_0) < 0$ donc $(z_n) = (\frac{v_n}{\delta})$ est bien définie et converge vers -1 et, par conséquent,

$$\boxed{\text{si } \mathrm{Re}(\overline{\delta}V) < 0,\ (v_n) \text{ est bien définie et converge vers } -\delta.}$$

(b) Donner une interprétation géométrique dans le plan complexe de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \mathrm{Re}(\overline{\delta}z) > 0\}$.

On a vu, toujours en I.3, que $\mathrm{Re}(z) > 0 \iff |z-1| < |z+1|$. Donc, par le même principe que précédemment,

$$\mathrm{Re}(\overline{\delta}z) > 0 \iff \mathrm{Re}\Big(\frac{z}{\delta}\Big) > 0 \iff \Big|\frac{z}{\delta} - 1\Big| < \Big|\frac{z}{\delta} + 1\Big| \iff |z-\delta| \leqslant |z+\delta| \quad (*)$$

en réduisant au même dénominateur et simplifiant les $|\delta| > 0$.
Introduisons les points M, R_1, R_2 d'affixes respectifs z, δ et $-\delta$. $(*)$ se traduit géométriquement par $MR_1 < MR_2$. Donc, en identifiant point et affixe,

$$\boxed{\text{l'ensemble donné correspond à l'ensemble des complexes plus proches de la racine } \delta \text{ que de la racine } -\delta.}$$

(c) Montrer que (v_n) est mal définie si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$ tels que $V = i\,\delta\,\mathrm{cotan}\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}$.

Le premier rang pour lequel v_n s'annule étant le premier rang pour lequel z_n s'annule, (v_n) est mal définie si et seulement si (z_n) est mal définie c'est-à-dire, d'après I.3.c, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$ tels que

$$z_0 = \frac{v_0}{\delta} = i\mathrm{cotan}\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}$$

ce qui en multipliant par δ donne la condition attendue.

$$\boxed{(v_n) \text{ est mal définie si et seulement si il existe } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \in [\![0, 2^m - 1]\!] \text{ tels que } V = i\,\delta\,\mathrm{cotan}\frac{(2k+1)\pi}{2^{m+1}}.}$$

II.4. Approximation informatique de $\sqrt{2}$.

(a) Soit $s > 0$.
Montrer que si $|s^2 - 2| \leqslant 10^{-k}$, alors $|s - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-k}$.

Avec $s > 0$, $|s + \sqrt{2}| = s + \sqrt{2} \geqslant 1$ donc si $|s^2 - 2| \leqslant 10^{-k}$,

$$\boxed{|s - \sqrt{2}| = \frac{|s^2-2|}{|s+\sqrt{2}|} \leqslant \frac{10^{-k}}{1} = 10^{-k}}$$

(b) Ecrire une fonction `approx(n)` codée dans le langage de votre choix, prenant n comme argument et renvoyant une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près à l'aide de la suite étudiée dans cette partie.

Pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près, il suffit de calculer les termes de la suite (v_k) avec $a = 2$ en partant par exemple de $v_0 = 1$ (qui est plus près de $\sqrt{2}$ que $-\sqrt{2}$. On calcule les termes de proche en proche jusqu'à ce que $|v_k^2 - 2| < 10^{-n}$ ce qui assure d'après la question précédente que $|v_k - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-n}$ (la suite restant évidemment positive).

```python
def approx(n):
    v = 1
    while abs(v*v-2) > 10**(-n) :
        v = 0.5 * (v + 2 / v )
    return v
```

III . Méthode de Newton et approximation de j

L'algorithme de Newton permet d'obtenir une valeur approchée d'une des racines du polynôme P. Il s'agit de considérer la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$$

et une condition u_0 bien choisie.

III.1. Montrer qu'en considérant $P_a : x \mapsto x^2 - a$, on obtient par l'algorithme de Newton, la suite de Héron (z_n) définie dans les deux parties précédentes.

Avec $P_a = X^2 - a$, on obtient immédiatement la suite définie par la relation de récurrence

$$\boxed{u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - a}{2u_n} = u_n - \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big)}$$

ce qui correspond bien à la suite de Héron.

III.2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quelle est la relation de récurrence obtenue si l'on cherche une racine p-ième du nombre a (qui peut être complexe) ? On considérera un polynôme P, à coefficients entiers, de degré p.

Pour avoir une racine p-ième d'un complexe a,

$$\boxed{\text{on peut prendre le polynôme } P_a = X^p - a.}$$

On obtient la relation de récurrence

$$\boxed{u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^p - a}{pu_n^{p-1}} = \frac{1}{p}\left((p-1)u_n + \frac{a}{u_n^{p-1}}\right)}$$

III.3. On considère la suite (z_n) définie par z_0 tel que $|z_0 - j| \leqslant \dfrac{1}{5}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2z_n + \dfrac{1}{z_n^2}\right)$ et on admet qu'elle est bien définie.

(a) À quel polynôme P est associée la nouvelle suite (z_n). Conjecturer les valeurs éventuelles attentues comme limite de (z_n) sous hypothèse de convergence ?

Par association, on voit avec la question II.2 que le polynôme $P = X^3 - 1$ convient.

$$\boxed{\text{La suite devrait donc converger, si la valeur initiale s'y prête, vers une racine cubique de l'unité à savoir } 1,\ j \text{ ou } j^2 = \bar{j}.}$$

(b) On note, pour tout entier n, $U_n = z_n - j$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \dfrac{2z_n + j}{3z_n^2} \times U_n^2$.

Un calcul donne

$$z_{n+1} - j = \frac{1}{3}\left(2z_n + \frac{1}{z_n^2}\right) - j = \frac{1}{3z_n^2}\left(2z_n^3 - 3jz_n^2 + 1\right)$$

On voit apparaître le polynôme $Q = 2X^3 - 3jX^2 + 1$ dont on remarque que j est racine ($Q(j) = 2j^3 - 3j^3 + 1 = 0$) donc il se factorise par $X - j$ donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $Q = (X - j)(aX^2 + bX + c)$. En développant et en identifiant les coefficients, on voit que

$$a = 2 \qquad b - ja = -3j \qquad -jb + c = 0 \qquad -jc = 1$$

dont on tire $a = 2$, $b = -j$ et $c = -j^2$ donc $Q = (X - j)(2X^2 - jX - j^2)$. On voit alors que j est encore racine de $2X^2 - jX - j^2$ donc se factorise lui aussi par $X - j$. On trouve au final

$$\boxed{Q = (X - j)^2(2X + j) \quad \text{et donc, en reportant,} \quad U_{n+1} = \frac{2z_n + j}{3z_n^2}U_n^2}$$

On aurait pu aussi développer bêtement le membre de droite pour arriver à celui de gauche mais c'est « petit joueur ».

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n - j| \leqslant \dfrac{1}{5} \Rightarrow |z_{n+1} - j| \leqslant \dfrac{1}{2}|z_n - j|$.

On pourra commencer par encadrer $|z_n|$ sous l'hypothèse $|z_n - j| \leqslant \dfrac{1}{5}$.

Supposons que $|U_n| \leqslant \dfrac{1}{5}$. On veut montrer que $|U_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|U_n|$. Compte tenu de la relation précédente, il suffit de vérifier que

$$\left|\frac{2z_n + j}{3z_n^2}U_n\right| = \frac{|2z_n + j|}{3|z_n|^2}|U_n| \leqslant \frac{1}{2}$$

Par inégalité triangulaire, $\big||z_n| - |j|\big| \leqslant |z_n - j| \leqslant \frac{1}{5}$ donc $-\frac{1}{5} \leqslant |z_n| - 1 \leqslant \frac{1}{5}$ ce qui donne $\frac{4}{5} \leqslant |z_n| \leqslant \frac{6}{5}$. On a alors

$$|2z_n + j| \leqslant 2|z_n| + |j| \leqslant 2\frac{6}{5} + 1 = \frac{17}{5} \qquad 3|z_n|^2 \geqslant 3\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{25} \qquad |U_n| \leqslant \frac{1}{4}$$

donc

$$\boxed{\frac{|2z_n + j|}{3|z_n|^2}|U_n| \leqslant \frac{\frac{17}{5}}{\frac{48}{25}}\frac{1}{4} = \frac{17 \times 5}{48 \times 2 \times 2} = \frac{85}{2 \times 96} \leqslant \frac{1}{2}}$$

(d) En déduire, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n - j| \leqslant \dfrac{1}{5 \times 2^n}$.
Qu'en déduit-on ?

On prouve l'inégalité notée $\mathcal{P}(n)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

— L'inégalité est vraie au rang 0 puisque, par hypothèse, $|z_0 - j| \leqslant \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \times 2^0}$.

— Supposons l'inégalité vraie au rang n. Alors, en particulier $|z_n - j| \leqslant \frac{1}{5 \times 2^n} \leqslant \frac{1}{5}$ donc avec la question précédente et $\mathcal{P}(n)$ on a

$$|z_{n+1} - j| \leqslant \frac{1}{2}|z_n - j| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{5 \times 2^n} = \frac{1}{5 \times 2^{n+1}}$$

— Donc l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (z_n) \text{ tend vers } j \text{ puisque } |\tfrac{1}{2}| < 1.}$$

La suite précédente (z_n) converge, dans « la plupart des cas »vers l'une des racines troisième de l'unité (marquées sur le cercle dans la figure). La limite de cette suite dépend du point z_0 considéré en germe. Le schéma suivant représente, grâce à un calcul informatique les « bassins d'attraction »des trois limites :
— en blanc, les germes z_0 tel que $(z_n) \to 1$,
— en gris, les germes z_0 tel que $(z_n) \to j$,
— en noir, les germes z_0 tel que $(z_n) \to j^2$,
Les quelques points z_0 qui conduisent à une suite mal définie ne sont pas visibles ici.