Devoir Surveillé n°2

Sujet donné le vendredi 18 octobre 2024, 3h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Problème -

I . Inégalités arithmético-géométrique, de Cauchy-Schwarz et applications

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité arithmético-géométrique (IAG_n) est l'inégalité

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n \ , \ \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (IAG_n)$$

Cette inégalité établit une comparaison entre la moyenne arithmétique des nombres $a_1, \dots, a_n$ (membre de droite) et leur moyenne géométrique (membre de gauche).

I.1. **Preuve algébrique de l'inégalité arithmético-géométrique.**

(a) Établir l'inégalité (IAG_2).

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que (IAG_{2^p}) est vraie. Démontrer l'inégalité $(IAG_{2^{p+1}})$.
Que vient-on de démontrer ? (le justifier).

(c) Soient n un entier naturel non nul qui n'est pas une puissance de 2 et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Posons $G = \prod_{k=1}^{n} a_k$ et $A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

i. Justifier l'existence d'un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que $2^p > n$.

ii. Appliquer l'inégalité (IAG_{2^p}) au 2^p-uplet $(a_1, \dots, a_n, A, \dots, A)$, exprimer ses deux membres en fonction de A et G puis en déduire l'inégalité (IAG_n). On prendra soin de distinguer les cas $A = 0$ et $A > 0$.

I.2. **Preuve analytique de l'inégalité arithmético-géométrique.**

(a) Soient P et S deux réels strictement positifs, n un entier tel que $n \geqslant 1$. Considérons la fonction $f \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{Px}{(S+x)^{n+1}} \end{array} \right.$

Étudier les variations de f, en déduire que f admet un maximum global que l'on exprimera en fonction de P et S.

(b) En déduire une preuve par récurrence de (IAG_n). On traitera à part le cas où l'un au moins des réels est nul.

I.3. **Comparaison avec la moyenne harmonique.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. La moyenne harmonique de $a_1, \dots, a_n$ est $\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$ (c'est l'inverse de la moyenne arithmétique de leurs inverses).
En appliquant l'inégalité (IAG_n) à la famille des inverses, montrer que

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \qquad (IHG_n)$$

(b) Soient $a_1, \dots, a_n$ n réels strictement positifs. Déduire de ce qui précède que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right) \geqslant n^2$$

I.4. **Application de l'inégalité arithmético-géométrique.**
On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(a) = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.
On considère $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En exploitant (IAG_2) ou (IAG_{2n}) (ou une autre idée), montrer que $u_n(x) \times u_n(y) \leqslant u_{2n}(x+y)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. En exploitant $(IAG)_n$ pour les valeurs suivantes des paramètres : pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = 1 + \dfrac{x+y}{n}$ et $a_n = 1 + \dfrac{x+y}{n} + \dfrac{xy}{n}$, montrer que $u_n(x+y) \leqslant u_n(x) \times u_n(y)$.

(c) On admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et on note $e(a)$ sa limite.
Montrer que $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $e(x+y) = e(x) \times e(y)$.

I.5. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels de signe quelconque.

Posons $A = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ et $B = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.

Le but de cette question est d'établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \tag{CS_n}$$

(a) Prouver l'inégalité (CS_n) dans le cas ou A ou B est nul.

(b) On suppose désormais $A > 0$ et $B > 0$.

i. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique (IAG_2), montrer que

$$|a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} a_k^2 + \frac{A}{B} b_k^2\right)$$

ii. En déduire l'inégalité (CS_n).

(c) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, redémontrer l'inégalité établie dans la question I.3(b).

II . Transformée de Legendre-Fenchel et inégalité de Hölder

Notons E l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$, deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ dont la dérivée est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 en 0^+, vers $+\infty$ en $+\infty$:

$$E = \{f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[\text{ 2 fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \mid \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0\ ,\ \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty\ ,\ f'' > 0 \text{ sur }]0, +\infty[\}$$

II.1. Soit $f \in E$.

(a) Justifier que f' réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

(b) Posons, pour tout $a \in]0, +\infty[$, $h_a \left|\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax - f(x) \end{array}\right.$

i. Étudier les variations de h_a.

ii. En déduire que l'on peut définir la fonction $\widehat{f} \left|\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \max\{ax - f(x) \mid x \in]0, +\infty[\} \end{array}\right.$ et expliciter $\widehat{f}(a)$ en fonction de a, f et $(f')^{-1}$.

Notons T l'application $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}\right.$

II.2. Nous allons montrer que T est à valeurs dans E. Soit $f \in E$.

(a) Montrer que f'^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $\left(f'^{-1}\right)'$ en fonction de f'' et de f'^{-1}

(b) Considérons, de plus, $\widehat{f} = T(f)$. Montrer que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\widehat{f}\ '(a) = f'^{-1}(a)$.

On admettra pour la suite le résultat suivant.
Soit $h :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ strictement croissante et bijective.
Alors, pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})^2$: $\displaystyle\lim_{x \to a} h(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{y \to b} h^{-1}(y) = a$.

(c) En déduire que $\widehat{f} \in E$.

Désormais, on notera T l'application $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}\right.$. On appelle cette application, la transformée de Legendre-Fenchel.

II.3. Pour tout $r > 1$, notons $\gamma_r \left|\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^r}{r} \end{array}\right.$

(a) Montrer que, pour tout $r > 1$, $\gamma_r \in E$.

(b) Soient $(p, q) \in]1, +\infty[^2$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $T(\gamma_p) = \gamma_q$. En déduire $(T \circ T)(\gamma_p)$.

II.4. **Inégalité de Hölder.**
On considère $(p,q) \in (]1,+\infty[)^2$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots a_n$ et $b_1, \ldots b_n$ des réels strictement positifs. On souhaite montrer l'inégalité de Hölder de rang n

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} \qquad (IH_n)$$

(a) Soit $f \in E$. En reprenant la définition de $\widehat{f}$, montrer que pour tout $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, $f(a) + \widehat{f}(b) \geqslant ab$.

(b) En déduire, à l'aide des fonctions γ_r que pour $(a_1, \ldots a_n)$, $(b_1, \ldots b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^p = \sum_{k=1}^{n} b_k^q = 1$, alors on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}$$

(c) En exploitant un argument d'homogénisation, montrer l'inégalité de Hölder en toute généralité.

(d) Montrer que l'inégalité (IH_n) de Hölder implique l'inégalité (CS_n) de Cauchy-Schwarz.

II.5. Calculer $(T \circ T)(f)$ pour tout $f \in E$. T est-elle injective ? surjective ?

III . Inégalités de Shapiro

Cette partie a pour objectif d'établir pour certaines petites valeurs de n la réponse à la question posée en 1954 par le mathématicien H. S. Shapiro (1928 - 2021) : a-t-on, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tous $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs,

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{n}{2} \quad ? \qquad (Sh_n)$$

III.1. **Question d'optimalité.** Donner un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels strictement positifs tel que

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} = \frac{n}{2}$$

Quelle conséquence ce résultat a concernant l'optimalité du minorant proposé par Shapiro ?

III.2. **Cas n=2.** Montrer que l'inégalité (Sh_2) est vraie. Est-elle optimale ?

III.3. **Pourquoi ne pas chercher à majorer ?**

(a) Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2, x_3) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ tels que $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} > M$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe pas de constante réelle $C_n > 0$ telle que, pour tous $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs,

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \leqslant C_n$$

III.4. **Cas n=3.** Soient x_1, x_2 et x_3 trois réels strictement positifs. Posons $S = x_1 + x_2 + x_3$ et $A = \dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_3 + x_1} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2}$.

(a) Montrer que $A + 3 = \dfrac{S}{S - x_1} + \dfrac{S}{S - x_2} + \dfrac{S}{S - x_3}$.

(b) À l'aide de l'inégalité établie dans la question I.3(b), justifier que $(A+3)\left(\dfrac{S - x_1}{S} + \dfrac{S - x_2}{S} + \dfrac{S - x_3}{S}\right) \geqslant 9$.

(c) En déduire que l'inégalité (Sh_3) est vraie.

III.5. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS_n), que

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n \ , \ \forall (b_1, \ldots, b_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n \ , \ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_k} \geqslant \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k} \qquad (I_n)$$

On pourra utiliser que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{a_k}{\sqrt{b_k}} \times \sqrt{b_k}$.

III.6. **Cas n=4.** Soient x_1, x_2, x_3 et x_4 quatre réels strictement positifs.
Posons $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ et $A = x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + x_3(x_4 + x_1) + x_4(x_1 + x_2)$.

(a) Montrer que $2A \leqslant S^2$. On pourra pour cela développer, simplifier puis factoriser la différence entre les deux membres de l'inégalité pour l'écrire comme une somme de 2 carrés.

(b) En utilisant l'inégalité (I_n) et en observant que $\dfrac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} = \dfrac{x_i^2}{x_i(x_{i+1} + x_{i+2})}$, établir la validité de (Sh_4).

III.7. **Cas n=5.** Soient x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 cinq réels strictement positifs.
Posons $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, $A = x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + x_3(x_4 + x_5) + x_4(x_5 + x_1) + x_5(x_1 + x_2)$ et $B = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$.

(a) Montrer que $S^2 = B + 2A$.

(b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS_n) établie dans la question I.5, majorer S^2 par un multiple de B puis en déduire que $S^2 \geqslant \dfrac{5}{2}A$.

(c) En déduire d'une manière analogue au cas $n = 4$ une preuve de (Sh_5).

Répondre en toute généralité à la question posée en début de partie dépasse l'ambition de ce sujet. L'inégalité (Sh_n) est vraie pour tout $n \in [\![2, 13]\!]$ et pour $n \in \{15, 17, 19, 21, 23\}$. En revanche elle est fausse pour les autres valeurs de n.
Ce résultat donne du sens à la question suivante dans lequelle nous allons établir une inégalité du même type mais avec un facteur $\dfrac{1}{4}$ au lieu du facteur $\dfrac{1}{2}$.

III.8. Soient $n \geqslant 3$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.
Dans cette question, l'objectif est d'établir que

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{n}{4} \tag{S}$$

Quitte à réaliser une permutation circulaire sur les indices, nous pouvons supposer que x_1 est le plus grand nombre de la famille sans que la valeur de la somme S ne soit modifiée.
Posons $x_{n+1} = x_1$.
Posons $i_1 = 1$.
i_k étant construit pour un $k \in [\![1, n-1]\!]$, si $x_{1+i_k} \geqslant x_{2+i_k}$, posons $i_{k+1} = 1 + i_k$, sinon $i_{k+1} = 2 + i_k$.
La suite d'entiers (i_k) est strictement croissante et augmente de 1 ou 2 à chaque fois. Elle arrive donc, pour un indice $r \geqslant 1$ sur l'une des deux valeurs $n-1$ ou n : $i_r \in \{n-1, n\}$. On pose alors $i_{r+1} = n+1$ de sorte que $x_{i_{r+1}} = x_1$.

(a) Justifier que $r \geqslant \dfrac{n}{2}$.

(b) En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, montrer que

$$\frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k} + x_{2+i_k}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{r} \frac{x_{i_k}}{2x_{i_{k+1}}} \right)^{\frac{1}{r}}$$

(c) Conclure en démontrant l'inégalité (S_n).

DEVOIR SURVEILLE 2 - Correction

Problème -

I . Inégalités arithmético-géométrique, de Cauchy-Schwarz et applications

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité arithmético-géométrique (IAG_n) est l'inégalité

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n \ , \ \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (IAG_n)$$

Cette inégalité établit une comparaison entre la moyenne arithmétique des nombres $a_1, \dots, a_n$ (membre de droite) et leur moyenne géométrique (membre de gauche).

I.1. **Preuve algébrique de l'inégalité arithmético-géométrique.**

(a) Établir l'inégalité (IAG_2).

Soient $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2$, alors $\sqrt{a_1}$ et $\sqrt{a_2}$ existent bien et $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$.
Or le développement donne (identité remarquable) : $0 \leqslant a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}$.
Et donc

$$\boxed{\forall \ (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad \sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \qquad (IAG_2)}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que (IAG_{2^p}) est vraie. Démontrer l'inégalité $(IAG_{2^{p+1}})$.
Que vient-on de démontrer ? (le justifier).

Soient $(a_1, a_2, \dots a_{2^p}, \dots a_{2^{p+1}}) \in \mathbb{R}_+^{2^{p+1}}$, on note $n = 2^p$, donc $2n = 2^{p+1}$.

On peut appliquer (IAG_2) à $A = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ et $B = \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}$

$$\sqrt[2^{p+1}]{\prod_{i=1}^{2^p} a_i} = \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}} = \sqrt{AB} \underbrace{\leqslant}_{\substack{(IAG_2)\\ \text{pour } A \text{ et } B}} \frac{1}{2}(A+B) \underbrace{\leqslant}_{\substack{(IAG_{2^p})\\ \text{pour } a_1, \dots, a_{2^p} \\ \text{et } a_{2^p+1}, \dots, a_{2^{p+1}}}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} a_i\right) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i = \frac{1}{2^{p+1}}\sum_{i=1}^{2^{p+1}} a_i$$

$$\boxed{\text{Ainsi si } (IAG_{2^p}) \text{ est vraie, alors } (IAG_{2^{p+1}}) \text{ est également vraie.}}$$

Puisque (IAG_2) est vraie, mais également (IAG_1), et que pour tout entier p, dès que (IAG_{2^p}) est vraie, on a également $(IAG_{2^{p+1}})$,

$$\boxed{\text{on a démontré par une récurrence sur } p \in \mathbb{N} \text{ que : } \forall \ p \in \mathbb{N},\ (IAG_{2^p}) \text{ est vraie.}}$$

(c) Soient n un entier naturel non nul qui n'est pas une puissance de 2 et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Posons $G = \prod_{k=1}^{n} a_k$ et $A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

i. Justifier l'existence d'un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que $2^p > n$.

Posons $p = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor + 1$, alors $p - 1 \leqslant \frac{\ln n}{\ln 2} < p$ et donc, puisque $\ln 2 > 0$:
$\ln(2^{p-1}) = (p-1)\ln 2 = \ln n < p \ln 2 = \ln(2^p)$ et enfin par **stricte** croissance de la fonction ln (ou exp).

$$\boxed{n < 2^p \text{ (choisi optimalement, d'une certaine façon)}}$$

Autre méthode : la suite $(2^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique qui diverge vers $+\infty$ (car de raison $q = 2 > 1$).
Donc pour tout $A > 0$, $\exists\ P$ tel que $\forall\ p \geqslant P$, $2^p > A$.
En particulier en faisant $A \leftarrow n$, on peut affirmer que $\{p \in \mathbb{N} \mid 2^p > n\}$ est non vide ce qui répond à la question.
Par ailleurs, cet ensemble est inclus dans $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément que l'on peut choisir si l'on veut optimiser (=choisir le plus petit p qui convient),même si ce n'est pas demandé.

---

ii. Appliquer l'inégalité (IAG_{2^p}) au 2^p-uplet $(a_1, \dots, a_n, A, \dots, A)$, exprimer ses deux membres en fonction de A et G puis en déduire l'inégalité (IAG_n). On prendra soin de distinguer les cas $A = 0$ et $A > 0$.

• On suppose dans un premier temps que $A \neq 0$.
Puisque (IAG_{2^p}) est vraie :

$$A^{1-\frac{n}{2^p}} G^{\frac{1}{2^p}} = A^{\frac{2^p-(n+1)+1}{2^p}} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/2^p} = \sqrt[2^p]{\prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=n+1}^{2^p} A} \leqslant \frac{1}{2^p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{2^p} A\right) = \frac{n}{2^p}A + \frac{2^p-n}{2^p}A = A$$

En multipliant par $A^{\frac{n}{2^p}-1} > 0$ (car $A \neq 0$) , on obtient :

$$G^{\frac{1}{2^p}} \leqslant A^{\frac{n}{2^p}}$$

Puis, comme $t \mapsto t^{2^p/n}$ est croissante (car $2^p/n \geqslant 0$), en composant l'inégalité précédente par cette fonction, on trouve :

$$G^{1/n} \leqslant A \text{ autrement écrit } \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

• On suppose maintenant que $A = 0$.
Alors la somme de termes positifs A est nulle, donc nécessairement tous ses termes sont nuls : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = 0$.
Et par conséquent, on a également $G = 0$ et donc $G^{1/n} \leqslant A$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, l'inégalité } (IAG_n) \text{ a été démontrée.}}$$

I.2. **Preuve analytique de l'inégalité arithmético-géométrique.**

(a) Soient P et S deux réels strictement positifs, n un entier tel que $n \geqslant 1$. Considérons la fonction $f \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{Px}{(S+x)^{n+1}} \end{array}\right.$

Étudier les variations de f, en déduire que f admet un maximum global que l'on exprimera en fonction de P et S.

La fonction f est une fraction rationnelle parfaitement définie sur $\mathbb{R}_+$, puisque le dénominateur ne s'y annule pas ($S > 0$). f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = \frac{P(S+x)^{n+1} - (n+1)(S+x)^n Px}{(S+x)^{2(n+1)}} = \frac{P(S+x) - (n+1)Px}{(S+x)^{n+2}} = \frac{P(S-nx)}{(S+x)^{n+2}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(S+x)^{n+2} > 0$, et $P > 0$ donc

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow S - nx > 0 \Longleftrightarrow x < \frac{S}{n}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	S/n	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

Ainsi, par croissance sur $\left[0, \dfrac{S}{n}\right]$, puis décroissance sur $\left[\dfrac{S}{n}, +\infty\right[$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) \leqslant f\left(\dfrac{S}{n}\right)$.
Or

$$f\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{\frac{PS}{n}}{(S+\frac{S}{n})^{n+1}} = \frac{n^n P}{(n+1)^{n+1} S^n}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \frac{Px}{(S+x)^{n+1}} \leqslant \frac{n^n P}{(n+1)^{n+1} S^n}}.$$

(b) En déduire une preuve par récurrence de (IAG_n). On traitera à part le cas où l'un au moins des réels est nul.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: « $\forall\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ ».

— $\mathcal{P}_1$ est vraie puisque, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[1]{\prod_{i=1}^{1} a_i} = a \leqslant a = \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} a_i$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$.
⋆ On suppose, dans un premier temps que l'un au moins des réels $a_1, \ldots, a_n$ est nul.
Dans ce cas $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = 0$ donc le membre de gauche de l'inégalité à prouver est nul.
Or par addition de termes positifs, nécessairement le membre de droite est positif ou nul.

Donc, dans ce cas $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée immédiatement.

⋆ On suppose, dans un seconde temps que tous les réels $a_1, \dots, a_n$ sont non nuls. Notons $P = \prod_{i=1}^{n} a_i$ et $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Dans ce cas $S > 0$ et $P > 0$.
Cela permet de considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{Px}{(S+x)^{n+1}}$ étudiée dans la question précédente.
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{Px}{(S+x)^{n+1}} \leqslant \dfrac{n^n P}{(n+1)^{n+1}S}$ donc $Px \leqslant \dfrac{n^n P}{(n+1)^{n+1}S}(S+x)^{n+1}$.
En particulier, pour $x \leftarrow a_{n+1}$:

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i = P \times a_{n+1} \leqslant \frac{n^n P}{(n+1)^{n+1}S^n}(S+a_{n+1})^{n+1} = \frac{n^n P}{(n+1)^{n+1}S^n} \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{n+1} = \frac{n^n P}{S^n} \times \left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{n+1}$$

Par ailleurs, on a supposé que $\mathcal{P}_n$ est vraie, donc en l'appliquant au n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$, $\sqrt[n]{P} \leqslant \dfrac{1}{n}S$, donc $P \leqslant \dfrac{S^n}{n^n}$ et ainsi $\dfrac{n^n P}{S^n} \leqslant 1$.
On a donc :

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i \leqslant \left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{n+1}$$

Cela donne bien l'inégalité attendue par croissance de $t \mapsto t^{1/(n+1)}$ sur $\mathbb{R}_+$ (les deux membres sont positifs ou nuls car $\prod_{i=1}^{n+1} a_i \geqslant 0$).

Ainsi, dans tous les cas, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée. Et l'hérédité est assurée.
La récurrence est donc démontrée :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*,\ (IAG_n) \text{ est vérifiée.}}$$

I.3. **Comparaison avec la moyenne harmonique.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. La moyenne harmonique de $a_1, \dots, a_n$ est $\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$ (c'est l'inverse de la moyenne arithmétique de leurs inverses).
En appliquant l'inégalité (IAG_n) à la famille des inverses, montrer que

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \qquad (IHG_n)$$

Posons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $b_k = \dfrac{1}{a_k}$ (bien défini car $a_k \neq 0$).
On peut appliquer (IAG_n) au n-uplet $(b_1, b_2, \dots b_n)$ car $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k \geqslant 0$ donc $b_k \geqslant 0$. On a donc :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Tous ces termes sont positifs, donc en prenant l'image des deux membres par $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\boxed{\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \qquad (IHG_n)}$$

(b) Soient $a_1, \dots, a_n$ n réels strictement positifs. Déduire de ce qui précède que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2$$

On considère de nouveau l'inégalité intermédiaire de la question précédente, ainsi que (IAG_n),

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$$

Tous ces termes sont positifs, donc on peut multiplier ces inégalités membre à membre en conservant l'ordre :

$$1 = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}} \times \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$$

Enfin, en multipliant par $n^2 \geqslant 0$:

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2}$$

I.4. **Application de l'inégalité arithmético-géométrique.**

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(a) = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$.

On considère $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En exploitant (IAG_2) ou (IAG_{2n}) (ou une autre idée), montrer que $u_n(x) \times u_n(y) \leqslant u_{2n}(x+y)$.

Puisque $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, alors $\left(1+\frac{x}{n}\right)$ et $\left(1+\frac{y}{n}\right)$ sont positifs.

En considérant, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_k = \left(1+\frac{x}{n}\right)$ puis pour $k \in [\![n+1,2n]\!]$, $a_k = \left(1+\frac{y}{n}\right)$, (IAG_{2n}) appliquée au $2n$-uplet $a_1,\dots,a_n,a_{n+1},\dots,a_{2n}$ donne :

$$\sqrt[2n]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n} = \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{x}{n}\right)\prod_{i=n+1}^{2n}\left(1+\frac{x}{n}\right)} \leqslant \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^n\left(1+\frac{x}{n}\right)+\sum_{i=n+1}^{2n}\left(1+\frac{y}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n}(n+x+n+y) = \left(1+\frac{x+y}{2n}\right)$$

En composant avec $t \mapsto t^{2n}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{u_n(x) \times u_n(y) \leqslant u_{2n}(x+y)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. En exploitant $(IAG)_n$ pour les valeurs suivantes des paramètres : pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $a_k = 1+\frac{x+y}{n}$ et $a_n = 1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n}$, montrer que $u_n(x+y) \leqslant u_n(x)\times u_n(y)$. Toujours, avec $(IAG)_n$, montrer que $u_n(x+y) \leqslant u_n(x)\times u_n(y)$.

On applique directement (IAG_n) à la suite donnée dans l'énoncé :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)\times\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n}\right)} \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)+\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(n+(x+y)+\frac{xy}{n}\right)$$

Or

$$\frac{1}{n}\left(n+(x+y)+\frac{xy}{n}\right) = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)$$

Donc en élevant à la puissance n l'inégalité précédente,

$$\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{n-1}\times\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n}\right) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)\times\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n}\right) \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = u_n(x)\times u_n(y)$$

Et par ailleurs, comme $xy \geqslant 0$: $1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n} \geqslant 1+\frac{x+y}{n}$.

Comme on multiplie par des nombres positifs :

$$\boxed{u_n(x+y) = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{n-1}\times\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n}\right) \leqslant u_n(x)\times u_n(y)}$$

(c) On admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et on note $e(a)$ sa limite.
Montrer que $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $e(x + y) = e(x) \times e(y)$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$:

$$u_n(x + y) \leqslant u_n(x) \times u_n(y) \leqslant u_{2n}(x + y)$$

Les deux suites à gauche et à droite de cette inégalité convergent vers la même limite : $e(x + y)$.
Le théorème de convergence par encadrement permet alors de conclure :

1. La suite $(u_n(x) \times u_n(y))_n$ converge également,
2. Sa limite est la même : $e(x + y)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) \times u_n(y) = e(x + y)$.
Or par produit de suites convergentes : $(u_n(x) \times u_n(y))_n$ converge vers $e(x) \times e(y)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) \times u_n(y) = e(x) \times e(y)$.
Et par unicité des limites, on peut identifier :

$$\boxed{e(x + y) = e(x) \times e(y)}$$

ATTENTION Il y a une chose qu'il est interdit d'écrire : $e(x + y) \leqslant u_n(x) \times u_n(y) \leqslant e(x + y)$.

I.5. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels de signe quelconque.

Posons $A = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}$ et $B = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}$.

Le but de cette question est d'établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \qquad (CS_n)$$

(a) Prouver l'inégalité (CS_n) dans le cas ou A ou B est nul.

Sans perte de généralité (SPDG), on peut supposer $A = 0$.
On a alors $A^2 = 0$, et comme il s'agit d'une somme de nombres positifs $(a_k^2)_{k\in\mathbb{N}_n}$, on a donc : $\forall\ k \in \mathbb{N}_n$, $a_k^2 = 0$.

Et par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $a_k = 0$ et ainsi $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$.

$$\boxed{\text{L'inégalité } (CS_n) \text{ est donc vraie } (0 \leqslant 0 \times B).}$$

(b) On suppose désormais $A > 0$ et $B > 0$.

i. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique (IAG_2), montrer que

$$|a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}a_k^2 + \frac{A}{B}b_k^2\right)$$

Posons $\alpha = \frac{B}{A}a_k^2 \geqslant 0$ et $\beta = \frac{A}{B}b_k^2 \geqslant 0$.
D'après (IAG_2) appliquée au couple (α, β) (autorisé car ce sont des réels positifs ou nuls), on obtient

$$|a_k b_k| = \sqrt{a_k^2 \frac{B}{A} \times b_k^2 \frac{A}{B}} = \sqrt{\alpha\beta} \underbrace{\leqslant}_{(IAG_2)} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}a_k^2 + \frac{A}{B}b_k^2\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}a_k^2 + \frac{A}{B}b_k^2\right)}$$

---

ii. En déduire l'inégalité (CS_n).

Le résultat de la question précédente est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}_n$. On additionne ces n inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{B}{A}a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{B}b_k^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{A}{B}\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}A^2 + \frac{A}{B}B^2\right) = AB$$

Il ne reste plus qu'à observer que l'inégalité triangulaire donne

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$$

si bien que l'inégalité précédente permet d'écrire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant AB$$

d'où, en utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \qquad (CS_n)}$$

(c) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, redémontrer l'inégalité établie dans la question I.3(b).

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n réels strictement positifs.
Appliquons l'inégalité (CS_n) pour $a_k \leftarrow \sqrt{a_k}$ et $b_k \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{a_k}}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (ce qui a du sens car les a_k sont strictement positifs) :

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \times \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.}$$

II . Transformée de Legendre-Fenchel et inégalité de Hölder

Notons E l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$, deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ dont la dérivée est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 en 0^+, vers $+\infty$ en $+\infty$:

$$E = \{f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[\text{ 2 fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \mid \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \ , \ \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty \ , \ f'' > 0 \text{ sur }]0, +\infty[\}$$

II.1. Soit $f \in E$.

(a) Justifier que f' réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

⋆ f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f' est dérivable une fois et ainsi f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

⋆ Puisque $f \in E$, $(f')' = f'' > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de la bijection permet d'affirmer que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f'(\mathbb{R}_+^*) =]\lim\limits_{0^+} f', \lim\limits_{+\infty} f'[=]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f' \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur }]\lim_{0^+} f', \lim_{+\infty} f'[=]0, +\infty[.}$$

(b) Posons, pour tout $a \in]0, +\infty[$, $h_a \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax - f(x) \end{array}\right.$

i. Étudier les variations de h_a.

---

h_a est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x > 0$,

$$h_a'(x) = a - f'(x)$$

$a \in]0, +\infty[$, et on a vu que f' est bijective (strictement croissante) de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
donc il existe un unique $x_a \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $f'(x_a) = a$
avec l'équivalence pour $x > 0$: $h_a'(x) > 0 \iff f'(x) < a \iff x < x_a$ (f' strictement croissante).

$$\boxed{h_a \text{ est strictement croissante sur }]0, x_a[\text{ et strictement décroissante sur }]x_a, +\infty[, \text{ où } x_a = f'^{-1}(a).}$$

---

ii. En déduire que l'on peut définir la fonction $\widehat{f} \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \max\{ax - f(x) \mid x \in]0, +\infty[\} \end{array}\right.$ et expliciter $\widehat{f}(a)$ en fonction de a, f et $(f')^{-1}$.

Compte-tenu du résultat de la question précédente (les variations de h_a), on peut affirmer que, pour tout $a > 0$:

$$\{h_a(x) = ax - f(x), x \in \mathbb{R}_+^*\} \text{ présente un maximum en } x = x_a = f'^{-1}(a)$$

ce maximum vaut alors

$$\boxed{\widehat{f}(a) := af'^{-1}(a) - f(f'^{-1}(a))}$$

La fonction $\widehat{f}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons T l'application $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}\right.$

II.2. Nous allons montrer que T est à valeurs dans E. Soit $f \in E$.

(a) Montrer que f'^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $\left(f'^{-1}\right)'$ en fonction de f'' et de f'^{-1}

$\star$ f est une application de E, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\star$ Par ailleurs, $(f')' = f''$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc ne s'annule jamais sur $I = \mathbb{R}_+^*$.
Nous avons vu dans le cours, que dans ce cas, $(f')^{-1}$ est également dérivable sur $J = (f')(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, a \in J = \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(f'^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{(f')'(f'^{-1}(a))} = \frac{1}{f''(f'^{-1}(a))}$$

$$\boxed{\text{Donc } f'^{-1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \left(f'^{-1}\right)' = \frac{1}{f'' \circ f'^{-1}}.}$$

(b) Considérons, de plus, $\widehat{f} = T(f)$. Montrer que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\widehat{f}\,'(a) = f'^{-1}(a)$.

D'après la question II.1((b))ii, $\widehat{f} : a \mapsto af'^{-1}(a) - f(f'^{-1}(a))$.
On vient de montrer que f'^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait que f l'est, donc par composition, multiplication et combinaison linéaire de fonctions dérivables, $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Et pour tout $a > 0$:

$$(\widehat{f}\,)'(a) = f'^{-1}(a) + a\left(f'^{-1}\right)'(a) - \left(f'^{-1}\right)'(a) \times f'(f'^{-1}(a))$$

Or $f'(f'^{-1})(a) = a$, et donc le calcul se simplifie en $(\widehat{f}\,)'(a) = f'^{-1}(a)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \ (\widehat{f}\,)' = f'^{-1}}$$

(c) En déduire que $\widehat{f} \in E$.

A partir de là, les calculs sont plus simples.
• Nous avons vu dans la quesion II.2(b) que f'^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\widehat{f}' = f'^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\widehat{f}$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
• En dérivant l'égalité établie dans la question II.2(b),

$$(\widehat{f}\,)'' = (f'^{-1})' \underbrace{=}_{\text{quest. II.2(a)}} \frac{1}{f'' \circ f'^{-1}} > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \text{ car } f'' > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

• Enfin $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 (= 0^+)$, donc $\lim\limits_{a \to 0^+} \widehat{f}(a) = \lim\limits_{a \to 0^+} f'^{-1}(a) = 0$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{a \to +\infty} \widehat{f}(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} f'^{-1}(a) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par conséquent : } \widehat{f} \in E.}$$

Désormais, on notera T l'application $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}\right.$. On appelle cette application, la transformée de Legendre-Fenchel.

II.3. Pour tout $r > 1$, notons γ_r $\left|\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^r}{r} \end{array}\right.$

(a) Montrer que, pour tout $r > 1$, $\gamma_r \in E$.

Soit $r > 1$.

- γ_r est définie, et dérivable une première fois sur $\mathbb{R}_+^*$, puisqu'il s'agit d'une fonction puissance avec un exposant > 0.
  On a alors, pour tout $x > 0$, $\gamma_r'(x) = \dfrac{rx^{r-1}}{r} = x^{r-1}$. Puis, γ_r' est de nouveau dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc γ_r est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De plus, pour tout $x > 0$, $\gamma_r''(x) = \underbrace{(r-1)}_{>0} x^{r-2} > 0$ donc $\gamma_r'' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Enfin, $\lim_{x\to 0^+} \gamma_r'(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{r-1} = 0$ car $r-1>0$. De même $\lim_{x\to+\infty} \gamma_r'(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{r-1} = +\infty$ car $r-1>0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } r>1,\ \gamma_r \in E.}$$

(b) Soient $(p,q) \in]1,+\infty[^2$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $T(\gamma_p) = \gamma_q$. En déduire $(T\circ T)(\gamma_p)$.

On a vu : pour tout $x>0$, $\gamma_p'(x) = x^{p-1}$. Fixons $a>0$
Et donc $h_a'(x) = 0 \Longleftrightarrow \gamma_p'(x) = a \Longleftrightarrow x = \sqrt[p-1]{a}$.
Ainsi $\widehat{\gamma_p}(a) = a a^{\frac{1}{p-1}} - \dfrac{1}{p}\left(a^{\frac{1}{p-1}}\right)^p = a^{\frac{1}{p-1}+1} - \dfrac{1}{p} a^{\frac{p}{p-1}} = \left(1-\dfrac{1}{p}\right) a^{\frac{p}{p-1}}$.
Or on a : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$, i.e. $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p}$, donc $\dfrac{p}{p-1} = q$.
Par conséquent, $\widehat{\gamma_p}(a) = \dfrac{1}{q}a^q = \gamma_q(a)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } T(\gamma_p) = \gamma_q.}$$

Puisque $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p} = 1$, alors, la même formule appliquée en échangeant p et q donne $T(\gamma_q) = \gamma_p$.
Et par conséquent :

$$\boxed{T\circ T(\gamma_p) = \gamma_p}$$

II.4. **Inégalité de Hölder.**
On considère $(p,q) \in (]1,+\infty[)^2$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots a_n$ et $b_1,\dots b_n$ des réels strictement positifs. On souhaite montrer l'inégalité de Hölder de rang n

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q} \qquad (IH_n)$$

(a) Soit $f \in E$. En reprenant la définition de $\widehat{f}$, montrer que pour tout $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, $f(a) + \widehat{f}(b) \geqslant ab$.

Par définition, pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$: $\widehat{f}(b) = \max\{ba - f(a), a \in \mathbb{R}_+^*\}$,
Donc pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\widehat{f}(b) \geqslant ba - f(a)$.

$$\boxed{\text{pour tout } (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ f(a) + \widehat{f}(b) \geqslant ab.}$$

(b) En déduire, à l'aide des fonctions γ_r que pour $(a_1,\dots a_n), (b_1,\dots b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, si $\sum_{k=1}^n a_k^p = \sum_{k=1}^n b_k^q = 1$, alors on a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$$

On applique le résultat de la question II.4(a) pour $f \leftarrow \gamma_p$ (ce qui est autorisé car $\gamma_p \in E$ d'après la question II.3(a)), On a donc, puisque $\widehat{f} \leftarrow \gamma_q$ (question II.3(b) : $T(\gamma_p) = \gamma_q$), pour tout $a,b>0$: $\dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q \geqslant ab$.

En particulier pour $a \leftarrow a_k$ et $b \leftarrow b_k$, puis en sommant pour k de 1 à n :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^n b_k^q \geqslant \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Or par hypothèse $\sum_{k=1}^n a_k^p = \sum_{k=1}^n b_k^q = 1$ et $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. On a donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant 1 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}}$$

(c) En exploitant un argument d'homogénisation, montrer l'inégalité de Hölder en toute généralité.

Nous ne supposons plus ici que $\sum_{k=1}^n a_k^p = \sum_{k=1}^n b_k^q = 1$.

Considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $a'_k = \dfrac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}}$ et $b'_k = \dfrac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}}$ ce qui a du sens car les réels étant strictement positifs, $\sum_{i=1}^n a_i^p > 0$ et $\sum_{i=1}^n b_i^q > 0$.

Alors $\sum_{k=1}^n {a'_k}^p = \sum_{k=1}^n \dfrac{a_k^p}{\sum_{i=1}^p a_i^p} = \dfrac{\sum_{k=1}^p a_k^p}{\sum_{i=1}^p a_i^p} = 1$ et de même $\sum_{k=1}^n {b'_k}^q = 1$.

On peut appliquer la réponse de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^n a'_k b'_k \leqslant 1$$

Et par simple produit en croix (puisque $\sum_{i=1}^n {a_i}^p > 0$ et $\sum_{i=1}^n {b_i}^q > 0$) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q} \qquad (IH_n)}$$

(d) Montrer que l'inégalité (IH_n) de Hölder implique l'inégalité (CS_n) de Cauchy-Schwarz.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels de signe quelconque.
Appliquons, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité (IH_n) de Hölder pour $\star$ $(p,q) \leftarrow (2,2)$ (autorisé car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$),
$\star$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_k \leftarrow |a_k| + \varepsilon$ et $b_k \leftarrow |b_k| + \varepsilon$ (autorisé car $|a_k| + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0$ et $|b_k| + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0$)
ce qui donne

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \sum_{k=1}^n (|a_k| + \varepsilon)(|b_k| + \varepsilon) \leqslant \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + \varepsilon)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|b_k| + \varepsilon)^2\right)^{1/2}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, les deux membres de l'inégalité ci-dessus ont une limite finie ce qui permet de passer à la limite pour conclure que

$$\sum_{k=1}^n |a_k||b_k| = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^n (|a_k| + \varepsilon)(|b_k| + \varepsilon) \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + \varepsilon)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|b_k| + \varepsilon)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right)^{1/2}$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_k b_k|$$

si bien que l'inégalité précédente permet d'écrire ($\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 = |a|^2$)

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}$$

d'où, en utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \qquad (CS_n)}$$

II.5. Calculer $(T \circ T)(f)$ pour tout $f \in E$. T est-elle injective ? surjective ?

D'après la question II.1((b))ii appliquée à $\widehat{f}$:

$$\forall\ a > 0, \qquad \widehat{\widehat{f}}(a) = a\widehat{f}\ '^{-1}(a) - \widehat{f}\big(\widehat{f}\ '^{-1}(a)\big)$$

Or d'après II.2(b), $\widehat{f}\ ' = f'^{-1}$, donc $\widehat{f}\ '^{-1} = f'$.
Ainsi, pour tout $a > 0$:

$$\widehat{\widehat{f}}(a) = af'(a) - \widehat{f}(f'(a))$$

Puis, toujours avec la formule établie dans la question II.1((b))ii : (pour $a \leftarrow f'(a)$) :

$$\widehat{f}(f'(a)) = f'(a){f'}^{-1}(f'(a)) - f({f'}^{-1}(f'(a))) = f'(a) \times a - f(a)$$

Donc pour tout $a > 0$:

$$\widehat{\widehat{f}}(a) = af'(a) - af'(a) + f(a) = f(a)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall\, f \in E, \quad T \circ T(f) = f}$$

$\boxed{T \text{ est une involution de } E \text{ donc injective et surjective.}}$

III . Inégalités de Shapiro

Cette partie a pour objectif d'établir pour certaines petites valeurs de n la réponse à la question posée en 1954 par le mathématicien H. S. Shapiro (1928 - 2021) : a-t-on, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tous $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs,

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geqslant \frac{n}{2} \quad ? \tag{Sh_n}$$

III.1. **Question d'optimalité.** Donner un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} = \frac{n}{2}$$

Quelle conséquence ce résultat a concernant l'optimalité du minorant proposé par Shapiro ?

En prenant, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $x_k = 1$, on a trouve que chacun des termes de la somme vaut $\dfrac{1}{2}$ et donc

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} = \frac{n}{2}}$$

Ainsi si cette somme admet un minorant en toute généralité (par rapport aux nombres $x_i > 0$), nécessairement ce minorant est inférieur à $\dfrac{n}{2}$.

$\boxed{\text{Si l'inégalité } (Sh_n) \text{ de Shapiro est vraie, alors elle est optimale (on ne peut pas trouver un minorant plus grand que } \tfrac{n}{2}.}$

III.2. **Cas n=2.** Montrer que l'inégalité (Sh_2) est vraie. Est-elle optimale ?

L'inégalité (Sh_2) s'exprime tout simplement de la façon suivante (pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$) :

$$\frac{x_1}{x_2+x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2} = 1 = \frac{2}{2}$$

$\boxed{\text{Ainsi } (Sh_2) \text{ est vraie et est optimale (et même indépendante des nombres } x_1, x_2 > 0 \text{ considérés).}}$

III.3. **Pourquoi ne pas chercher à majorer ?**

(a) Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2, x_3) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ tels que $\dfrac{x_1}{x_2+x_3} > M$.

On peut prendre $x_1 = 3M$, $x_2 = x_3 = 1$, on a $\dfrac{x_1}{x_2+x_3} = \dfrac{3}{2}M > M$, puisque $M > 0$.

$$\boxed{\text{Il existe } (x_1, x_2, x_3) \in {\mathbb{R}_+^*}^3 \text{ tels que } \frac{x_1}{x_2+x_3} > M.}$$

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe pas de constante réelle $C_n > 0$ telle que, tous $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs,

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \leqslant C_n$$

Soit $n \geqslant 3$. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une constante réelle $C_n > 0$ telle que, pour tous $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs, $\dfrac{x_1}{x_2+x_3} + \dfrac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \dfrac{x_n}{x_1+x_2} \leqslant C_n$.

Alors d'après la question précédente appliquée pour $M \leftarrow C_n$, il existe $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{x_1}{x_2+x_3} > C_n$.

Puis, prenons $x_4 = \ldots = x_n = 1$. $\dfrac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \dfrac{x_n}{x_1+x_2}$ est une somme de termes positifs, donc elle est positive si bien que

$$C_n < \frac{x_1}{x_2+x_3} \leqslant \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \leqslant C_n$$

ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 3, \text{ il n'existe pas de constante réelle } C_n > 0 \text{ telle que, tous } x_1, \ldots, x_n \text{ réels strictement positifs, } \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \leqslant C_n.}$$

III.4. **Cas n=3.** Soient x_1, x_2 et x_3 trois réels strictement positifs. Posons $S = x_1 + x_2 + x_3$ et $A = \dfrac{x_1}{x_2+x_3} + \dfrac{x_2}{x_3+x_1} + \dfrac{x_3}{x_1+x_2}$.

(a) Montrer que $A + 3 = \dfrac{S}{S-x_1} + \dfrac{S}{S-x_2} + \dfrac{S}{S-x_3}$.

$$A+3 = \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2+x_3}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_1} + \frac{x_3+x_1}{x_3+x_1} + \frac{x_3}{x_1+x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2} = \frac{S}{x_2+x_3} + \frac{S}{x_3+x_1} + \frac{S}{x_1+x_2}$$

Et comme $x_2 + x_3 = S - x_1$, $x_3 + x_1 = S - x_2$ et $x_1 + x_2 = S - x_3$, on a bien

$$\boxed{A+3 = \frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + \frac{S}{S-x_3}}$$

(b) À l'aide de l'inégalité établie dans la question I.3(b), justifier que $(A+3)\left(\dfrac{S-x_1}{S} + \dfrac{S-x_2}{S} + \dfrac{S-x_3}{S}\right) \geqslant 9$.

On applique la relation trouvée dans la question I.3(b), avec $n = 3$, et pour $k \in \mathbb{N}_3$: $a_k = \dfrac{S}{S-x_k}$, alors

$$\boxed{(A+3)\left(\frac{S-x_1}{S} + \frac{S-x_2}{S} + \frac{S-x_3}{S}\right) = (a_1+a_2+a_3) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geqslant 3^2 = 9}$$

(c) En déduire que l'inégalité (Sh_3) est vraie.

On a alors $\dfrac{S-x_1}{S} + \dfrac{S-x_2}{S} + \dfrac{S-x_3}{S} = 3\dfrac{S}{S} - \dfrac{x_1+x_2+x_3}{S} = 3 - 1 = 2$.

Et donc, en multipliant par $\dfrac{1}{2} > 0$: $A + 3 \geqslant \dfrac{9}{2}$. En soustrayant 3 :

$$\boxed{A \geqslant \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \qquad (Sh_3)}$$

III.5. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS_n), que

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n \text{ , } \forall (b_1, \ldots, b_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n \text{ , } \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{b_k} \geqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2}{\sum_{k=1}^n b_k} \qquad (I_n)$$

On pourra utiliser que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{a_k}{\sqrt{b_k}} \times \sqrt{b_k}$.

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $c_1, \ldots, c_n$ et $d_1, \ldots, d_n$ des réels de signe quelconque :

$$\left(\sum_{k=1}^n c_k d_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n c_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n d_k^2\right)$$

Donnons alors la valeur $c_k \leftarrow \dfrac{a_k}{\sqrt{b_k}}$ et $d_k \leftarrow \sqrt{b_k}$, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{b_k}\right) \times \left(\sum_{k=1}^n b_k\right)$$

Et ainsi, en divisant par $\displaystyle\sum_{k=1}^n b_k > 0$ (chaque b_k est strictement positif), le signe est inchangé :

$$\boxed{\frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2}{\sum_{k=1}^n b_k} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{b_k}}$$

III.6. **Cas n=4.** Soient x_1, x_2, x_3 et x_4 quatre réels strictement positifs.
Posons $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ et $A = x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + x_3(x_4 + x_1) + x_4(x_1 + x_2)$.

(a) Montrer que $2A \leqslant S^2$. On pourra pour cela développer, simplifier puis factoriser la différence entre les deux membres de l'inégalité pour l'écrire comme une somme de 2 carrés.

$$\begin{aligned} S^2 - 2A = &\ (\sum_{k=1}^{4} x_i)^2 - 2[x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1x_4 + 2x_2x_4 + x_2x_3 + x_3x_4] = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j - 2(x_1x_3 + x_2x_4) \\ = &\ x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + x_4^2 - 2x_2x_4 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 \end{aligned}$$

On a donc $S^2 - 2A$ qui est bien la somme de deux carrés. Il s'agit d'un nombre positif :

$$\boxed{S^2 \geqslant 2A}$$

(b) En utilisant l'inégalité (I_n) et en observant que $\dfrac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} = \dfrac{x_i^2}{x_i(x_{i+1} + x_{i+2})}$, établir la validité de (Sh_4).

On cherche à minorer

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} = \frac{x_1^2}{x_1(x_2 + x_3)} + \frac{x_2^2}{x_2(x_3 + x_4)} + \frac{x_3^2}{x_3(x_4 + x_1)} + \frac{x_4^2}{x_4(x_1 + x_2)}$$

En utilisant l'inégalité (I_4) de la question III.5 avec, pour $k \in [\![1, 4]\!]$, $a_k \leftarrow x_k$ et $b_k \leftarrow x_k(x_{k+1} + x_{k+2})$ (en notant les indices modulo 4 : $x_5 = x_1$ et $x_6 = x_2$) ce qui est autorisé car les x_i sont strictement positifs :

$$\left(\frac{x_1^2}{x_1(x_2 + x_3)} + \frac{x_2^2}{x_2(x_3 + x_4)} + \frac{x_3^2}{x_3(x_4 + x_1)} + \frac{x_4^2}{x_4(x_1 + x_2)}\right) \geqslant \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{4} x_k\right)^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{4} x_k(x_{k+1} + x_{k+2})} = \frac{S^2}{A}$$

Or cette dernière fraction est supérieure à 2 d'après la question précédente. Par transitivité :

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} \geqslant 2 = \frac{4}{2} \qquad (Sh_4)}$$

III.7. **Cas n=5.** Soient x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 cinq réels strictement positifs.
Posons $S = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$, $A = x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)+x_4(x_5+x_1)+x_5(x_1+x_2)$ et $B = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$.

(a) Montrer que $S^2 = B + 2A$.

On a

$$S^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_ix_j = B + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_ix_j$$

Or

$$\begin{aligned} A = &\ x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + x_3(x_4 + x_5) + x_4(x_5 + x_1) + x_5(x_1 + x_2) \\ = &\ x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + x_2(x_3 + x_4 + x_5) + x_3(x_4 + x_5) + x_4x_5 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_ix_j \end{aligned}$$

Donc on a bien

$$\boxed{S^2 = B + 2A}$$

(b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS_n) établie dans la question I.5, majorer S^2 par un multiple de B puis en déduire que $S^2 \geqslant \dfrac{5}{2}A$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$S^2 = \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{5} 1 \times x_i\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{5} 1^2 \times \sum_{k=1}^{5} x_i^2 = 5B$$

On a donc avec la question précédente :

$$S^2 = B + 2A \geqslant \frac{1}{5}S^2 + 2A$$

Donc $S^2 - \dfrac{1}{5}S^2 = \dfrac{4}{5}S^2 \geqslant 2A$ et finalement

$$\boxed{S^2 \geqslant \frac{5}{2}A}$$

(c) En déduire d'une manière analogue au cas $n = 4$ une preuve de (Sh_5).

On cherche à minorer

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_1}+\frac{x_5}{x_1+x_2}=\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_4)}+\frac{x_3^2}{x_3(x_4+x_5)}+\frac{x_4^2}{x_4(x_5+x_1)}+\frac{x_5^2}{x_5(x_1+x_2)}$$

En utilisant l'inégalité (I_5) de la question III.5 avec, pour $k \in [\![1,5]\!]$, $a_k \leftarrow x_k$ et $b_k \leftarrow x_k(x_{k+1}+x_{k+2})$ (en notant les indices modulo 5 : $x_6 = x_1$ et $x_7 = x_2$) ce qui est autorisé car les x_i sont strictement positifs :

$$\left(\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_4)}+\frac{x_3^2}{x_3(x_4+x_5)}+\frac{x_4^2}{x_4(x_5+x_1)}+\frac{x_5^2}{x_5(x_1+x_2)}\right)\geqslant\frac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{5}x_k\right)^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{5}x_k(x_{k+1}+x_{k+2})}=\frac{S^2}{A}$$

Or cette dernière fraction est supérieure à $\dfrac{5}{2}$ d'après la question précédente. Par transitivité :

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_1}+\frac{x_5}{x_1+x_2}\geqslant\frac{5}{2}\qquad(Sh_5)}$$

Répondre en toute généralité à la question posée en début de partie dépasse l'ambition de ce sujet. L'inégalité (Sh_n) est vraie pour tout $n \in [\![2,13]\!]$ et pour $n \in \{15,17,19,21,23\}$. En revanche elle est fausse pour les autres valeurs de n.
Ce résultat donne du sens à la question suivante dans lequelle nous allons établir une inégalité du même type mais avec un facteur $\dfrac{1}{4}$ au lieu du facteur $\dfrac{1}{2}$.

III.8. Soient $n \geqslant 3$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.
Dans cette question, l'objectif est d'établir que

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{4}\qquad(S_n)$$

Quitte à réaliser une permutation circulaire sur les indices, nous pouvons supposer que x_1 est le plus grand nombre de la famille sans que la valeur de la somme S ne soit modifiée.
Posons $x_{n+1} = x_1$.
Posons $i_1 = 1$.
i_k étant construit pour un $k \in [\![1, n-1]\!]$, si $x_{1+i_k} \geqslant x_{2+i_k}$, posons $i_{k+1} = 1 + i_k$, sinon $i_{k+1} = 2 + i_k$.
La suite d'entiers (i_k) est strictement croissante et augmente de 1 ou 2 à chaque fois. Elle arrive donc, pour un indice $r \geqslant 1$ sur l'une des deux valeurs $n-1$ ou n : $i_r \in \{n-1, n\}$. On pose alors $i_{r+1} = n+1$ de sorte que $x_{i_{r+1}} = x_1$.

(a) Justifier que $r \geqslant \dfrac{n}{2}$.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, i_{k+1} est égal à $i_k + 1$ ou à $i_k + 2$.
Donc $i_{k+1} \leqslant i_k + 2$, ou encore $i_{k+1} - i_k \leqslant 2$.
Ainsi $i_{r+1} - i_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}(i_{k+1} - i_k) \leqslant \sum_{k=1}^{r} 2 = 2r$.
Enfin, $i_{r+1} = n+1$ et $i_1 = 1$, donc $n \leqslant 2r$ et ainsi

$$\boxed{r \geqslant \frac{n}{2}}$$

(b) En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, montrer que

$$\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}}\geqslant\left(\prod_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{2x_{i_{k+1}}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

L'inégalité (IAG_r) appliquée au r-uplet $\left(\dfrac{x_{i_1}}{x_{1+i_1}+x_{2+i_1}}, \ldots, \dfrac{x_{i_r}}{x_{1+i_r}+x_{2+i_r}}\right)$ (autorisé car tous ces réels sont positifs ou nuls) donne

$$\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}}\geqslant\left(\prod_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Puis $x_{i_{k+1}} = \max(x_{1+i_k}, x_{2+i_k})$, donc $x_{1+i_k} + x_{2+i_k} \leqslant 2\max(x_{1+i_k}, x_{2+i_k}) = 2x_{i_{k+1}}$.
En passant à l'inverse (les deux réels appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$) :

$$\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}}\geqslant\frac{x_{i_k}}{2x_{i_{k+1}}}$$

Enfin par minoration de produit de nombres positifs et par croissance de $t \mapsto t^{1/r}$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut affirmer

$$\boxed{\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{2x_{i_{k+1}}}\right)^{\frac{1}{r}}}$$

(c) Conclure en démontrant l'inégalité (S_n).

Le terme de droite l'inégalité précédente est un produit télescopique, on a donc

$$\prod_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{2x_{i_{k+1}}} = \frac{1}{2^r}\prod_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{i_{k+1}}} = \frac{1}{2^r}\frac{x_{i_1}}{x_{i_{r+1}}} = \frac{1}{2^r} \qquad (x_{i_1} = x_1 = x_{i_{r+1}})$$

On a donc

$$\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}} \geqslant \left(\frac{1}{2^r}\right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{2}$$

Et donc, en multipliant par $r > 0$ (et avec le minorant de r de la question III.8(a)) :

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}} \geqslant \frac{r}{2} \geqslant \frac{n}{4}$$

Enfin, il ne reste plus qu'à observer que le membre de gauche de l'inégalité (Sh_n) est supérieur ou égal au terme minoré ci-dessus car la suite $(i_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est strictement croissante et appartient à $[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{1+i}+x_{2+i}} = \sum_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}} + \underbrace{\sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\notin i_1,\ldots,i_r}}\frac{x_j}{x_{1+j}+x_{2+j}}}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{k=1}^{r}\frac{x_{i_k}}{x_{1+i_k}+x_{2+i_k}}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{1+i}+x_{2+i}} \geqslant \frac{n}{4}}$$
