Devoir Surveillé n°3

Sujet donné le samedi 23 novembre 2024, 3h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Problème - Estimations de solution

Dans ce problème, nous présentons deux techniques permettant de majorer à tout instant les solutions réelles d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre de la forme

$$\forall t \in [0, +\infty[\ ,\ y''(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{H}$$

où a est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$.

I . Technique « d'énergie »inspirée par la mécanique

Dans cette partie, nous supposons que a est une fonction **strictement positive sur** $[0, +\infty[$, **strictement CROISSANTE sur** $[0, +\infty[$ et **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
Soit f une solution définie sur $[0, +\infty[$ de l'équation (H).
Considérons la fonction E définie pour tout $t \in [0, +\infty[$ par

$$E(t) = f(t)^2 + \frac{f'(t)^2}{a(t)}$$

I.1. Montrer que E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et décroissante.

I.2. En déduire que f est bornée sur $[0, +\infty[$. On explicitera un majorant de $|f|$ en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

I.3. Dans cette question uniquement, on suppose que $a(t) = 2 - e^{-t}$. Montrer que $|f|$ et $|f'|$ sont bornées.

II . Technique « de facteur intégrant »

Dans cette partie, on considére l'équation différentielle (H) pour laquelle $a(t) = e^t$:

$$\forall t \in [0, +\infty[\ ,\ y''(t) + e^t y(t) = 0 \tag{H_1}$$

Soit f une solution de (H_1) définie sur $\mathbb{R}_+$.

La technique d'énergie développée dans la partie I s'applique et permet de prouver que f est bornée. Néanmoins, nous allons établir une estimation plus fine en utilisant une fonction intermédiaire.

Considérons la fonction g définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $g(t) = f(t)e^{\frac{t}{5}}$.

II.1. Exprimer f, f' et f'' en fonction des dérivées g, g' et g'' puis, en utilisant que f est solution de (H_1), exprimer g en fonction de g' et g''.

II.2. Après avoir multiplié par g' (qui joue un rôle de « facteur intégrant ») l'identité précédente, établir que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ ,\ g^2(t) = g^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{{g'}^2(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u - \int_0^t \frac{2g'(u)g''(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u$$

II.3. À l'aide d'une intégration par parties de la dernière intégrale, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ ,\ g^2(t) = g^2(0) + \frac{25}{26}{g'}^2(0) - \frac{{g'}^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{1}{5}\int_0^t \frac{(e^u - \frac{4}{25})g'(u)^2}{(e^u + \frac{1}{25})^2}\mathrm{d}u$$

II.4. En déduire que g est bornée sur $\mathbb{R}_+$ puis que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ ,\ |f(t)| \leqslant e^{-\frac{t}{5}}\sqrt{g^2(0) + \frac{25}{26}{g'}^2(0)}$$

Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Problème - Équations avec conditions de bords de Dirichlet

Soient f et a deux fonctions à valeurs réelles définies et continues sur le segment $[0,1]$.
Dans tout le problème, nous considérons l'équation différentielle (E)

$$\forall t \in [0,1]\ ,\ -y''(t) + a(t)y(t) = f(t) \tag{E}$$

à laquelle est associée l'équation différentielle homogène (E_0)

$$\forall t \in [0,1]\ ,\ -y''(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_0}$$

Nous admettrons, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'existence et l'unicité d'une solution définie sur $[0,1]$ au problème de Cauchy $(C_{\alpha,\beta})$

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1]\ ,\ -y''(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \tag{$C_{\alpha,\beta}$}$$

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au problème suivant, dit de Dirichlet, pour lequel on cherche des solutions satisfaisant des conditions « de bord », à savoir des solutions qui s'annuelent aux extrémité du segment $[0,1]$:

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1]\ ,\ -y''(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{D}$$

auquel est associé le problème de Dirichlet homogène (D_0) :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1]\ ,\ -y''(t) + a(t)y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{D_0}$$

I . Exemples

I.1. **Cas où a est la fonction nulle et f la fonction constante de valeur c ($c \in \mathbb{R}$).**

(a) Déterminer les solutions de (E).

(b) En déduire la résolution du problème (D).

I.2. **Cas où a est la fonction nulle et f la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.**

(a) Déterminer la primitive de $t \mapsto \text{Arctan}(t)$ qui s'annule en 0 puis en déduire une solution particulière de (E).

(b) Déterminer les solutions de (E).

(c) En déduire la résolution du problème (D).

I.3. **Cas où a est la fonction constante de valeur 1 et f la fonction $t \mapsto e^{mt}$ ($m \in \mathbb{R}$).**

(a) Déterminer les solutions de (E) en fonction du paramètre m.

(b) En déduire la résolution du problème (D).

I.4. **Cas où a est la fonction constante de valeur $-\omega^2$ ($\omega > 0$) et f la fonction nulle.**

(a) Déterminer les solutions de (E) en fonction du paramètre ω.

(b) Résoudre le problème (D) et observer qu'il admet des solutions non identiquement nulles (que l'on explicitera) pour certaines valeurs de ω (que l'on explicitera).

II . Cas particulier où l'une des fonctions a et f est nulle

II.1. Soit g une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le segment $[0,1]$. Montrer que les fonctions $G_0 : t \mapsto \displaystyle\int_0^t g(u)\mathrm{d}u$ et $G_1 : t \mapsto \displaystyle\int_t^1 g(u)\mathrm{d}u$ sont définies sur $[0,1]$, dérivables sur $[0,1]$, $G_0' = g$ et $G_1' = -g$.

II.2. Soit h une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le segment $[0,1]$. Considérons la fonction φ définie pour tout $t \in [0,1]$ par

$$\varphi(t) = (1-t)\int_0^t uh(u)\mathrm{d}u + t\int_t^1 (1-u)h(u)\mathrm{d}u$$

Considérons la fonction φ définie pour tout $t \in [0,1]$ par

$$\varphi(t) = (1-t)\int_0^t uh(u)\mathrm{d}u + t\int_t^1 (1-u)h(u)\mathrm{d}u$$

(a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\varphi'(t) = -\int_0^1 uh(u)\mathrm{d}u + \int_t^1 h(u)\mathrm{d}u$$

(b) En déduire que φ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et solution du problème (D) pour $a=0$ et $f=h$.

(c) Soit ψ une solution du problème (D) pour $a=0$ et $f=h$.
En observant que $\psi-\varphi$ est solution d'un problème déjà résolu dans la partie I, montrer que $\psi=\varphi$.

II.3. **Existence et unicité des solutions du problème de Dirichlet (D) lorsque a est nulle.**

(a) Établir que, pour $a=0$ et f fixée, le problème (D) admet une unique solution.

(b) En déduire, par un calcul direct utilisant la question II.2 le résultat de la question I.2(c).

II.4. **Condition nécessaire pour l'existence d'une solution non nulle du problème de Dirichlet (D) lorsque f est nulle.**
Dans cette question, on ne suppose plus que a est la fonction nulle mais on suppose que f est la fonction nulle. On suppose de plus que l'on dispose d'une solution y du le problème (D).
On pose $A=\max\{|a(t)| \mid t\in[0,1]\}$ et $Y=\max\{|y(t)| \mid t\in[0,1]\}$. L'existence de ces deux constantes est admise et se déduit de la continuité des fonctions a et y sur le segment $[0,1]$. Cela signifie en particulier qu'il existe $(t_a,t_y)\in[0,1]^2$ tels que

$$\forall t\in[0,1]\ ,\ |a(t)|\leqslant A=|a(t_a)| \quad \text{et} \quad |y(t)|\leqslant Y=|y(t_y)|$$

(a) Justifier que

$$\forall t\in[0,1]\ ,\ y(t)=(t-1)\int_0^t ua(u)y(u)\mathrm{d}u+t\int_t^1 (u-1)a(u)y(u)\mathrm{d}u$$

(b) En majorant le membre de droite de l'inégalité ci-dessus, montrer que

$$\forall t\in[0,1]\ ,\ |y(t)|\leqslant \frac{AY}{8}$$

(c) Montrer que, si $A<8$, alors y est la fonction nulle sur $[0,1]$.
Vérifier que ce résultat n'est pas en contradiction avec les solutions explicites trouvées dans le cas où a est une fonction constante strictement négative.
Ou autre formulation :
En déduire une condition nécessaire sur A pour que le problème (D) admette au moins une solution non identiquement nulle sur $[0,1]$.
Vérifier que cette condition était bien satisfaite dans le cas où a est une fonction constante strictement négative et qu'il existe des solutions non identiquement nulles.

III . Existence et unicité d'une solution sous l'hypothèse $a\geqslant 0$

Dans toute cette partie, nous faisons l'hypothèse suivante : pour tout $t\in[0,1]$, $a(t)\geqslant 0$.

III.1. **Unicité des solutions de (D).**

(a) Soit u une solution de problème de Dirichlet homogène (D_0). Montrer, en intégrant par parties, que

$$\int_0^1 \Big({u'}^2(t)+a(t)u^2(t)\Big)\mathrm{d}t=0$$

(b) Soit h une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et positive ou nulle sur ce segment. Notons $H : t\mapsto \displaystyle\int_0^t h(u)\mathrm{d}u$.
Montrer, en étudiant les variations de H, que si $H(1)=0$, alors h est identiquement nulle sur $[0,1]$.

(c) Déduire des deux questions précédentes que la fonction nulle sur $[0,1]$ est l'unique solution du problème de Dirichlet homogène (D_0).

(d) Conclure que, pour des fonctions a et f fixées, il existe au plus une solution au problème de Dirichlet (D).

III.2. **Existence d'une solution pour (D).**
Notons respectivement u_1, u_2 les solutions définies sur $[0,1]$ des problèmes de Cauchy suivants :

$$\left\{\begin{array}{l}\forall t\in[0,1]\ ,\ -y''(t)+a(t)y(t)=0\\ y(0)=1\\ y'(0)=0\end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l}\forall t\in[0,1]\ ,\ -y''(t)+a(t)y(t)=0\\ y(0)=0\\ y'(0)=1\end{array}\right.$$

et w une solution définie sur $[0,1]$ de l'équation différentielle (E) : $\forall t\in[0,1]\ ,y''(t)+a(t)y(t)=f(t)$.
Notons $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_0$) l'ensemble des solutions définies sur $[0,1]$ de (E) (resp. (E_0)).

(a) Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et h une solution du problème $\left\{\begin{array}{l}\forall t\in[0,1]\ ,\ -y''(t)+a(t)y(t)=0\\ y(0)=\alpha\\ y'(0)=\beta\end{array}\right.$
Montrer que h s'exprime à l'aide des fonctions u_1 et u_2.

(b) En déduire que $\mathcal{S}_0=\{\lambda u_1+\mu u_2 \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

(c) Démontrer que $\mathcal{S}$ peut être décrit à l'aide des fonctions u_1, u_2 et w.

(d) En raisonnant par l'absurde et en utilisant la conclusion de la question III.1, montrer que $u_2(1)\neq 0$.

(e) Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que $\lambda u_1+\mu u_2+w$ est une solution du problème (D) si et seulement si (λ,μ) est solution d'un système linéaire de deux équations et deux inconnues dont on précisera les coefficients et le second membre.

(f) Établir l'existence d'une solution problème (D).
Le raisonnement mené dans cette question prouve-t-il également l'unicité de cette solution (déjà démontrée dans la question III.1(d) précédente).

DEVOIR SURVEILLE 3 - Correction

Problème - Estimations de solution

Dans ce problème, nous présentons deux techniques permettant de majorer à tout instant les solutions réelles d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre de la forme

$$\forall t \in [0,+\infty[\ ,\ y''(t)+a(t)y(t)=0 \tag{H}$$

où a est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$.

I . Technique « d'énergie »inspirée par la mécanique

Dans cette partie, nous supposons que a est une fonction **strictement positive sur** $[0,+\infty[$, **strictement CROISSANTE sur** $[0,+\infty[$ et **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
Soit f une solution définie sur $[0,+\infty[$ de l'équation (H).
Considérons la fonction E définie pour tout $t \in [0,+\infty[$ par

$$E(t) = f(t)^2 + \frac{f'(t)^2}{a(t)}$$

I.1. Montrer que E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et décroissante.

---

f est une solution de (H), équation différentielle d'ordre 2, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}+$.
Ainsi f^2 et ${f'}^2$ sont dérivable sur $\mathbb{R}+$. Par hypothèse, a est également dérivable (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}+$.
Par division ($a \neq 0$ sur $\mathbb{R}+$) et addition,

$$\boxed{E \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$E'(t) = 2f'(t)\left[f(t) + \frac{f''(t)a(t) - f'(t)a'(t)}{a^2(t)}\right] = \frac{2f'(t)}{a^2(t)}\left[f(t)a^2(t) + f''(t)a(t) - f'(t)a'(t)\right]$$

Or f est solution de (H), donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f(t)a^2(t) + f''(t)a(t) = a(t) \times [f''(t) + a(t)f(t)] = a(t) \times 0 = 0$$

Ainsi :

$$E'(t) = \frac{-2[f'(t)]^2 a'(t)}{a^2(t)}$$

Puis par hypothèse, a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $a' > 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
Donc pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{-2[f'(t)]^2 a'(t)}{a^2(t)} \leqslant 0$

$$\boxed{E \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

I.2. En déduire que f est bornée sur $[0,+\infty[$. On explicitera un majorant de $|f|$ en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

Puisque E est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $t \geqslant 0$, $E(t) \leqslant E(0)$, donc

$$f(t)^2 + \frac{f'(t)^2}{a(t)} \leqslant f(0)^2 + \frac{f'(0)^2}{a(0)}$$

Puis a et ${f'}^2$ étant positives sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(t)^2 \leqslant f(0)^2 + \frac{f'(0)^2}{a(0)}$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall\ t \geqslant 0,\ \left|f(t)\right| \leqslant \sqrt{f(0)^2 + \frac{f'(0)^2}{a(0)}}}$$

I.3. Dans cette question uniquement, on suppose que $a(t) = 2 - e^{-t}$. Montrer que $|f|$ et $|f'|$ sont bornées.

On constate que a vérifie bien les hypothèses de la question :
— a est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
— a est strictement positive su $\mathbb{R}_+$: $\forall\ t \geqslant 0$, $e^{-t} \leqslant 1$, donc $a(t) \geqslant 2 - 1 = 1 > 0$
— a est strictement croissante su $\mathbb{R}_+$: $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (composition), donc a est croissante sur $\mathbb{R}_+$

On exploite la relation trouvée à la question précédente, puisque $a(0) = 2 - 1 = 1$: $\forall\, t \geqslant 0,\ \left|f(t)\right| \leqslant \sqrt{f(0) + f'(0)}$.

A la question précédente, nous avions également : $f(t)^2 + \dfrac{f'(t)^2}{a(t)} \leqslant f(0)^2 + \dfrac{f'(0)^2}{a(0)}$.

Pour les mêmes raisons ($f(t)^2 \geqslant 0$), on a $f'(t)^2 \leqslant a(t)\left(f(0)^2 + \dfrac{f'(0)^2}{a(0)}\right)$, puisque $a(t) > 0$.

Dans le cas présent : $a(t) = 2 - e^{-t} \leqslant 2$ et $a(0) = 1$, et donc :

$$\boxed{\forall\, t \geqslant 0, \quad \left|f(t)\right| \leqslant \sqrt{f(0) + f'(0)} \text{ et } \left|f'(t)\right| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{f(0) + f'(0)}}$$

II . Technique « de facteur intégrant »

Dans cette partie, on considére l'équation différentielle (H) pour laquelle $a(t) = e^t$:

$$\forall t \in [0, +\infty[\ ,\ y''(t) + e^t y(t) = 0 \qquad (H_1)$$

Soit f une solution de (H_1) définie sur $\mathbb{R}_+$.

La technique d'énergie développée dans la partie I s'applique et permet de prouver que f est bornée. Néanmoins, nous allons établir une estimation plus fine en utilisant une fonction intermédiaire.

Considérons la fonction g définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $g(t) = f(t)e^{\frac{t}{5}}$.

II.1. Exprimer f, f' et f'' en fonction des dérivées g, g' et g'' puis, en utilisant que f est solution de (H_1), exprimer g en fonction de g' et g''.

Comme f est solution de H, elle est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+$. Il en est de même de $t \mapsto e^{\frac{t}{5}}$.

Par produit, g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+$.

En multipliant par $e^{-t/5}$, on a : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = g(t)e^{-\frac{t}{5}}$. Et ainsi

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad f'(t) = \left(g'(t) - \frac{1}{5}g(t)\right)e^{-\frac{t}{5}} \qquad f''(t) = \left(g''(t) - \frac{2}{5}g'(t) + \frac{1}{25}g(t)\right)e^{-\frac{t}{5}}$$

Enfin, puisque f est solution de (H_1).

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad 0 = f''(t) + e^t f(t) = \left(g''(t) - \frac{2}{5}g'(t) + \frac{1}{25}g(t) + e^t g(t)\right)e^{-\frac{t}{5}}$$

Et comme $e^{-\frac{t}{5}} \neq 0$,

$$\boxed{g \text{ vérifie : } \forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ g(t) = \frac{1}{5}\frac{2g'(t) - 5g''(t)}{e^t + \frac{1}{25}}}$$

II.2. Après avoir multiplié par g' (qui joue un rôle de « facteur intégrant ») l'identité précédente, établir que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ ,\ g^2(t) = g^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{g'^2(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u - \int_0^t \frac{2g'(u)g''(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u$$

On a donc, pour tout $t \geqslant 0$ et $u \in [0, t]$:

$$g(u)g'(u) = \frac{1}{5}\frac{2g'^2(u) - 5g''(u)g'(u)}{e^u + \frac{1}{25}}$$

On intègre pour u entre 0 et t (et en exploitant la linéarité de l'intégration) :

$$\frac{1}{2}[g^2(t) - g^2(0)] = \int_0^t g'(u)g(u)\mathrm{d}u = \frac{2}{5}\int_0^t \frac{g'^2(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u - \int_0^t \frac{g'(u)g''(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u$$

puisqu'une primitive de $t \mapsto g'(t)g(t)$ est $t \mapsto \frac{1}{2}g^2(t)$.

Et donc en multipliant tout par 2 et additionant $g^2(0)$:

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}_+\ ,\ g^2(t) = g^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{g'^2(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u - \int_0^t \frac{2g'(u)g''(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u}$$

II.3. À l'aide d'une intégration par parties de la dernière intégrale, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ ,\ g^2(t) = g^2(0) + \frac{25}{26}g'^2(0) - \frac{g'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{1}{5}\int_0^t \frac{(e^u - \frac{4}{25})g'(u)^2}{(e^u + \frac{1}{25})^2}\mathrm{d}u$$

La fonction $\varphi : t \mapsto g'^2(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $\varphi' : t \mapsto 2g'(t)g''(t)$.

(AVEZ-VOUS besoin de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, par rapport au théorème vu en cours ? ?)

Et l'application $\psi : t \mapsto \dfrac{1}{e^t + \frac{1}{25}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée : $\psi' : t \mapsto \dfrac{-e^t}{\left(e^t + \frac{1}{25}\right)^2}$.

La dernière intégrale de la question précédente est de la forme $\displaystyle\int_0^t \psi(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$. On peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^t \frac{2g'(u)g''(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u = [\psi(t)\varphi(t) - \psi(0)\varphi(0)] - \int_0^t \psi'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{g'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{g'^2(0)}{1 + \frac{1}{25}} - \int_0^t g'^2(u)\frac{-e^u}{\left(e^u + \frac{1}{25}\right)^2}\mathrm{d}u$$

Donc, en réinjectant dans l'équation précédente, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} g^2(t) = &\ g^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{g'^2(u)}{e^u + \frac{1}{25}}\mathrm{d}u - \frac{g'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} + \frac{g'^2(0)}{\frac{26}{25}} - \int_0^t g'^2(u)\frac{e^u}{\left(e^u + \frac{1}{25}\right)^2}\mathrm{d}u \\ = &\ g^2(0) + \frac{25g'^2(0)}{26} - \frac{g'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} + \frac{1}{5}\int_0^t \frac{g'^2(u)}{\left(e^u + \frac{1}{25}\right)^2}\left(4e^u + \frac{4}{25} - 5e^u\right)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\ t \in \mathbb{R}_+, \qquad g^2(t) = g^2(0) + \frac{25}{26}g'^2(0) - \frac{g'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{1}{5}\int_0^t \frac{(e^u - \frac{4}{25})g'(u)^2}{(e^u + \frac{1}{25})^2}\mathrm{d}u}$$

II.4. En déduire que g est bornée sur $\mathbb{R}_+$ puis que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ ,\ |f(t)| \leqslant e^{-\frac{t}{5}}\sqrt{g^2(0) + \frac{25}{26}g'^2(0)}$$

Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $e^t + \dfrac{1}{25} \geqslant 0$, $g'^2(t) \geqslant 0$, donc $\dfrac{g'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} \geqslant 0$.

$\forall\ u \in [0,t]$, $\dfrac{(e^u - \frac{4}{25})g'(u)^2}{(e^u + \frac{1}{25})^2} \geqslant 0$ (produit de nombres positifs), par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^t \frac{(e^u - \frac{4}{25})g'(u)^2}{(e^u + \frac{1}{25})^2}du \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g^2(t) \leqslant g^2(0) + \frac{25}{26}g'^2(0)$$

Donc en prenant la racine carrée :

$$\boxed{\forall\ t \geqslant 0, \qquad \left|g(t)\right| \leqslant \sqrt{g^2(0) + \frac{25}{26}g'^2(0)} \text{ et } g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+}$$

En multipliant par $e^{-t/5} > 0$:

$$\boxed{\forall\ t \geqslant 0, \qquad \left|f(t)\right| \leqslant e^{-\frac{t}{5}}\sqrt{g^2(0) + \frac{25}{26}g'^2(0)}}$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{5}}\sqrt{g^2(0) + \frac{25}{26}g'^2(0)} = 0$, le théorème de convergence par encadrement donne :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}|f(t)| = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.}$$

Remarque

Comme $g(0) = f(0)$ et $f'(0) = g'(0) - \dfrac{1}{5}g(0)$, donc $g'(0) = f'(0) + \dfrac{1}{5}g(0) = f'(0) + \dfrac{1}{5}f(0)$, on a donc comme majorant ici :

$$\forall\ t \geqslant 0, |f(t)| \leqslant e^{-\frac{t}{5}}\sqrt{f^2(0) + \frac{25}{26}(f'^2(0) + \frac{2}{5}f(0)f'(0) + f^2(0))}$$

$$\forall\ t \geqslant 0, |f(t)| \leqslant e^{-\frac{t}{5}}\sqrt{\frac{51}{26}f^2(0) + \frac{5}{13}f(0)f'(0) + \frac{25}{26}f'^2(0)}$$

A comparer à : $\forall\ t \geqslant 0, |f(t)| \leqslant \sqrt{f^2(0) + f'^2(0)}$, trouvée en première partie ($a(0) = e^0 = 1$).
