Devoir Surveillé n°4

Sujet donné le samedi 14 décembre 2024, 4h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Problème - Autour du nombre π

Ce problème est composé de IV parties indépendantes les unes des autres sauf mention du contraire.
La partie I propose l'étude de suites qui permettent d'approcher le nombre π.
La partie II a pour objectif de caractériser les valeurs du réel θ pour lesquelles la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans le segment $[-1,1]$.
La partie III propose l'etude de différentes notions de convergence et de voir si la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ permet de les illustrer en fonction du paramètre θ.
Enfin, dans la partie IV, nous prouvons que π est irrationnel.

I .Approximation de π

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Soit u la suite définie par $u_0 = \cos x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \cos \frac{x}{2^{n+1}}$$

On lui associe la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n \sin \frac{x}{2^n}$.

I.1. (a) Montrer que la suite v est géométrique.
(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de u_n en fonction de x et n.
(c) Montrer que la suite u converge et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sin(2x)}{2x}$.

Considérons les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\cos x}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

I.2. (a) Vérifier que $b_1 = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x}$.
(b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

I.3. (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n)$.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.
(c) En déduire la monotonie des suites (a_n) et (b_n).
(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$$

(e) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite notée ℓ.

I.4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{u_n \cos \frac{x}{2^n}}{\cos^2 x}$ et $b_n = \frac{u_n}{\cos^2 x}$.
(b) En déduire la valeur de ℓ.

I.5. Dans cette question, on prend la valeur particulière $x = \frac{\pi}{4}$.
(a) Quelle est la valeur de ℓ ? En déduire un encadrement de π à l'aide des suites a_n et b_n.
(b) Montrer que, pour obtenir un encadrement de π à 10^{-8} près, il suffit de trouver n tel que $\frac{4(b_n - a_n)}{a_n b_n} \leqslant 10^{-8}$.
(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(b_n - a_n)$$

et en déduire un encadrement de $b_n - a_n$ ne dépendant que de $n \in \mathbb{N}$.
(d) Combien suffit-il de calculer de termes des suites (a_n) et (b_n) pour obtenir un encadrement de π à 10^{-8} près ? On pourra exprimer l'entier trouvé à l'aide des fonctions partie entière et logarithme népérien.

II . Sous-groupes de $\mathbb{R}$

On admettra dans cette partie que π est un nombre irrationnel, résultat dont la preuve fait l'objet de la partie IV.
On note, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$: $a\mathbb{Z} = \{ka, k \in \mathbb{Z}\}$ puis $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ka + hb, (k, h) \in \mathbb{Z}^2\}$.
On rappelle que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.

II.1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

II.2. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$. On pose $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$.

(a) Pourquoi α est-il bien défini ?

(b) On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que G est alors dense dans $\mathbb{R}$. On pourra adapter la preuve de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ vue en cours.

(c) On suppose que $\alpha > 0$.

i. Justifier qu'il existe $g \in G$ tel que $\alpha \leqslant g < 2\alpha$.

ii. Supposons que $\alpha < g$. Montrer qu'il existe $g' \in G$ tel que $0 \leqslant g' < g$ et en déduire une contradiction. Que peut-on en conclure sur α ?

iii. Montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

II.3. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

(a) On suppose que $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ si bien qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$ ($\dfrac{p}{q}$ est appelé le représentant irréductible de $\dfrac{b}{a}$).

i. Montrer que, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $z(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}) = zx\mathbb{Z} + zy\mathbb{Z}$.

ii. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$.

(b) On suppose que $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$.

i. Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$, alors $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.

ii. Que peut-on en conclure concernant $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$?

II.4. On pourra utiliser dans la question qui suit la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ,\ \text{si } (u_n) \text{ converge vers } x_0, \text{ alors } (f(u_n)) \text{ converge vers } f(x_0)$$

(a) i. Soient D une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f(D)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.

ii. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire une condition suffisante sur $\dfrac{\theta}{\pi}$ pour que la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ soit dense dans $[-1, 1]$. On pourra s'intéresser au sous-groupe $2\pi\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$.

(b) i. Montrer que, pour tout rationnel r, $\sin(r\pi\mathbb{Z})$ est un ensemble fini.

ii. En déduire que la condition suffisante établie dans la question précédente est nécessaire et déterminer l'ensemble $\mathcal{I}_\pi$ des valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

III . Etude de la suite $\big(\sin(n\theta)\big)$

On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sin(n\theta)$.
Considérons l'équation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n \tag{E}$$

dans laquelle u est une suite réelle.

III.1. (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_\theta$ des suites réelles solutions de la relation de récurrence (E) en fonction de θ (on prendra soin de distinguer deux situations différentes selon les valeurs de θ).

(b) Supposons que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. En utilisant la relation de récurrence (E), montrer que, si une suite $u \in \mathcal{S}_\theta$ converge, alors sa limite est nulle.

(c) On se place dans le cas $\theta \equiv 0\ [2\pi]$. Quelles sont les limites des suites convergentes de l'ensemble $\mathcal{S}_\theta$?

III.2. (a) Montrer que la suite (s_n) est une solution de (E). Montrer que si (s_n) converge, alors sa limite est 0.

(b) Montrer, en exprimant (s_{n+1}) en fonction des suites (s_n) et $(\cos(n\theta))$, que pour $\theta \not\equiv 0[\pi]$ et si (s_n) converge, alors $(\cos(n\theta))$ converge aussi vers 0.

(c) Déterminer l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles la suite (s_n) converge.

III.3. Convergence « à la Euler ».

On dit qu'une suite (a_n) est Euler-convergente si la suite (A_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $A_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$, est convergente.

On note alors $\lim\limits_{E}(a_n)$, la valeur $\lim(A_n)$.

(a) Montrer que si (a_n) est une suite constante, alors (a_n) est Euler-convergente et $\lim\limits_{E}(a_n) = \lim(a_n)$.

(b) Soit (a_n) est une suite convergente vers 0.

i. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $\left| \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} |a_k|$.

ii. En déduire que (a_n) est Euler-convergente et $\lim\limits_{E}(a_n) = 0$.

Indication : On pourra montrer que, pour tout k fixé : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} = 0$.

(c) Que dire de l'Euler-convergence d'une suite (a_n) convergente.

(d) Montrer que (s_n) est Euler-convergente et que $\lim\limits_{E}(s_n) = 0$.

III.4. Equidistribution.

On dit qu'une suite (a_n) dense dans $[c,d]$ est équidistribuée si :

$\forall\, \gamma, \delta \in [c,d]$ tels que $\gamma < \delta$, $\lim \dfrac{\operatorname{card}\big(\{n \in [\![0, n-1]\!] \mid a_n \in [\gamma,\delta]\}\big)}{n} = \dfrac{\delta-\gamma}{d-c}$.

On admet que cela *impose* que pour toute fonction f continue sur $[c,d]$, on a $\dfrac{1}{d-c}\displaystyle\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(a_k)$.

Dans la suite de cette question $\theta \in \mathcal{I}_\pi$ et l'on admet que la densité de la suite (s_n) dans $[-1,1]$ peut se déduire de celle de la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$.

(a) Avec $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, calculer $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_k)$. Qu'en pensez-vous ?

(b) Avec $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, calculer $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_k)$. Qu'en pensez-vous ?

IV . Irrationnalité de π

L'objectif de cette partie est d'établir l'irrationnalité du nombre π.

Pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

IV.1. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

(a) Montrer qu'il existe $(n+1)$ entiers e_n, e_{n+1}, …, e_{2n} que l'on explicitera tels que $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} e_i x^i$.

(b) Calculer,
— pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_n^{(k)}(0)$,
— pour $k \in [\![n, 2n]\!]$, $f_n^{(k)}(0)$ en fonction de k, n et e_k,
— pour $k \in [\![2n+1, +\infty[\![$, $f_n^{(k)}(0)$.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel k, $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers. On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$.

On veut montrer que π^2 est un nombre irrationnel. Nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$.

IV.2. Posons, pour n entier naturel non nul et x réel,

$$F_n(x) = b^n(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2k)}(x)$$

(a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

(b) On pose, pour n entier naturel non nul et x réel,

$$g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x) \quad \text{et} \quad A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$

Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel, $g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$ et en déduire que A_n est un entier.

IV.3. On pose, toujours pour le même entier a, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

(a) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant a+1$, $\dfrac{a^n}{n!} \leqslant \dfrac{a^{a+1}}{a!n}$.

(b) En déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{2}$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$ et $\forall x \in [1/4, 3/4]$, $f_n(x) \geqslant \dfrac{3^n}{n!2^{4n}}$. .

(d) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $A_n \in]0,1[$ et conclure que π^2 est irrationnel.

(e) Comment peut-on déduire de ce qui précède que π est irrationnel ?

DEVOIR SURVEILLE 4 - Correction

Problème - Autour du nombre π

Ce problème est composé de IV parties indépendantes les unes des autres sauf mention du contraire.

La partie I propose l'étude de suites qui permettent d'approcher le nombre π.

La partie II a pour objectif de caractériser les valeurs du réel θ pour lesquelles la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans le segment $[-1,1]$.

La partie III propose l'etude de différentes notions de convergence et de voir si la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ permet de les illustrer en fonction du paramètre θ.

Enfin, dans la partie IV, nous prouvons que π est irrationnel.

I .Approximation de π

Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Soit u la suite définie par $u_0 = \cos x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \cos \frac{x}{2^{n+1}}$$

On lui associe la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n \sin \dfrac{x}{2^n}$.

I.1. (a) Montrer que la suite v est géométrique.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} \sin \frac{x}{2^{n+1}} = u_n \cos \frac{x}{2^{n+1}} \sin \frac{x}{2^{n+1}} = u_n \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2^n} = \frac{v_n}{2}$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et donc } \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{v_0}{2^n}.}$$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de u_n en fonction de x et n.

Comme $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x}{2^n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin(\dfrac{x}{2^n}) > 0$. Ainsi,

$$u_n = \frac{v_n}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{u_0 \sin \frac{x}{2^0}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\cos x \sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{2} \frac{\sin(2x)}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad \boxed{\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}}}$$

(c) Montrer que la suite u converge et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sin(2x)}{2x}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \sin'(0) = 1$ donc en posant $t_n = \dfrac{x}{2^n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, par composition de limites,

$$u_n = \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{1}{\frac{\sin t_n}{t_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(2x)}{2x} \quad \boxed{\text{d'où } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2x}{2x}.}$$

Considérons les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$, $b_0 = \dfrac{1}{\cos x}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

I.2. (a) Vérifier que $b_1 = \dfrac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x}$.

On a, puisque $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x > 0$ et $\cos \dfrac{x}{2} > 0$,

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{\cos x + 1}{2 \cos x} > 0$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 + 1}{2 \cos^2 x}} = \left| \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x} \right| = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x} \quad \boxed{\text{d'où } b_1 = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x}}$$

(b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

Vérifions par récurrence élémentaire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $a_n > 0$ et $b_n > 0$ »

— $\mathcal{P}(0)$ est vrai par hypothèse : $a_0 = 1 > 0$ et $b_0 = \dfrac{1}{\cos x} > 0$ car $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a donc $a_n > 0$ et $b_n > 0$. Alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} > 0$ et donc $a_{n+1}b_n > 0$ puis $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} > 0$ ce qui établit $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Donc, pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n > \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x} \text{ et } b_n > 0.}$$

I.3. (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n)$.

En multipliant par la quantité conjuguée $\left(\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2\ ,\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right) &= \sqrt{a_{n+1}}\left(\frac{b_n - a_{n+1}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\left(b_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}\left(b_n - a_n\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n).}$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

Montrons la propriété $\mathcal{P}(n)$:« $a_n < b_n$ » par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

⋆ Au rang 0, on a bien $b_0 = \dfrac{1}{\cos x} > 1 = a_0$ car comme $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, $\cos x \in]0,1[$ donc $\dfrac{1}{\cos x} \in]1, +\infty[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

⋆ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un n donné. Alors, comme $a_{n+1} > 0$, $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} > 0$ donc la relation établie dans la question précédente montre que $a_{n+1} - b_{n+1}$ et $a_n - b_n$ sont du même signe. Ainsi, comme $a_n - b_n < 0$ par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} - b_{n+1} < 0$ d'où la véracité de $\mathcal{P}(n)$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n.}$$

(c) En déduire la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} > 0$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_{n+1}b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_n}\right) = \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n}}\left(a_{n+1} - b_n\right) = \frac{\sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n}\right)}\left(a_n - b_n\right) < 0$$

car $b_n > 0$ et $a_n - b_n < 0$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$$

Prouvons l'inégalité par récurrence en considérant $\mathcal{P}(n)$: « $0 < b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— Au rang 0, on a bien $0 < b_0 - a_0 = \dfrac{1}{\cos x} - 1 = \dfrac{1}{2^0}\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un n donné. On a clairement $0 < \sqrt{a_{n+1}} \leqslant \sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}$ donc

$$0 < \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n}\right)} < \frac{1}{2}$$

Donc en multipliant par $b_n - a_n > 0$,

$$0 < \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n}\right)}(b_n - a_n) < \frac{b_n - a_n}{2}$$

Or $b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)$ car $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc on obtient bien

$$0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right).}$$

(e) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite notée ℓ.

Comme $(\frac{1}{2^n})$ tend vers 0, le théorème d'existence de limite par encadrement établit que $(b_n - a_n)$ aussi. Alors (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et leur différence tend vers 0 donc par le théorème des suites adjacentes,

$$\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent vers une même limite } \ell.}$$

I.4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{u_n \cos \frac{x}{2^n}}{\cos^2 x}$ et $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2 x}$.

Par récurrence sur $\mathcal{P}(n)$: « $a_n = \dfrac{u_n \cos \frac{x}{2^n}}{\cos^2 x}$ et $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2 x}$ » définie pour $n \in \mathbb{N}$.

— $\mathcal{P}(0)$ est vraie car

$$\frac{u_0 \cos \frac{x}{2^0}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 = a_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{u_0}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = b_0$$

— Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un rang n donné. Alors, en utilisant $\mathcal{P}(n)$ et la relation de récurrence sur u_n ($u_{n+1} = u_n \cos \dfrac{x}{2^{n+1}}$),

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{u_n}{2\cos^2 x}\left(\cos\frac{x}{2^n} + 1\right) = \frac{u_n}{2\cos^2 x} 2\cos^2 \frac{x}{2^{n+1}} = \frac{u_{n+1}\cos\frac{x}{2^{n+1}}}{\cos^2 x}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} = \sqrt{\frac{u_{n+1}\cos\frac{x}{2^{n+1}}}{\cos^2 x}\frac{u_n}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}}{\cos^2 x} \quad (\text{car } u_{n+1} > 0)$$

d'où la véracité de $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{u_n \cos \frac{x}{2^n}}{\cos^2 x} \text{ et } b_n = \frac{u_n}{\cos^2 x}.}$$

(b) En déduire la valeur de ℓ.

On avait vu à la question I.c que (u_n) tendait vers $\dfrac{\sin(2x)}{2x}$ donc (b_n) qui tend vers ℓ tend aussi vers

$$\frac{\sin(2x)}{2x\cos^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{2x \cos^2 x} = \frac{\tan x}{x}$$

$$\boxed{\text{Par unicité de la limite, } \ell = \frac{\tan x}{x}.}$$

I.5. Dans cette question, on prend la valeur particulière $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(a) Quelle est la valeur de ℓ ? En déduire un encadrement de π à l'aide des suites a_n et b_n.

Avec $x = \dfrac{\pi}{4}$, $\ell = \dfrac{4}{\pi}$. De plus, comme (a_n) était strictement croissante vers ℓ et (b_n) strictement décroissante vers ℓ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n < a_{n+1} \leqslant \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \frac{4}{\pi} = \inf\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\} \leqslant b_{n+1} < b_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ comme } a_n \text{ et } b_n > 0,\ \frac{4}{b_n} < \pi < \frac{4}{a_n}.}$$

(b) Montrer que, pour obtenir un encadrement de π à 10^{-8} près, il suffit de trouver n tel que $\dfrac{4(b_n - a_n)}{a_n b_n} \leqslant 10^{-8}$.

En interprétant en terme de distances, on a $\left|\dfrac{4}{b_n} - \pi\right| < \dfrac{4}{a_n} - \dfrac{4}{b_n} = \dfrac{4(b_n - a_n)}{a_n b_n}$.

$$\boxed{\text{Donc si } \frac{4(b_n - a_n)}{a_n b_n} \leqslant 10^{-8}, \text{ alors } \frac{4}{b_n} \text{ est une valeur approchée (par défaut) de } \pi.}$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(b_n - a_n)$$

et en déduire un encadrement de $b_n - a_n$ ne dépendant que de $n \in \mathbb{N}$.

On a $b_n > \ell > a_{n+1} > 0$ donc $\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}} \geqslant 2\sqrt{a_{n+1}}$ et donc

$$\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} \leqslant \frac{1}{4}$$

En exploitant cette inégalité avec l'égalité de I.3.a, on obtient immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(b_n - a_n)$$

Une récurrence élémentaire donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(b_n - a_n) \text{ et } 0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0).}$$

(d) Combien suffit-il de calculer de termes des suites (a_n) et (b_n) pour obtenir un encadrement de π à 10^{-8} près ? On pourra exprimer l'entier trouvé à l'aide des fonctions partie entière et logarithme népérien.

On a $a_n \geqslant a_0 = 1$ et $b_n \geqslant \ell = \dfrac{4}{\pi}$ donc $a_n b_n \geqslant \dfrac{4}{\pi}$ et $\dfrac{4}{a_n b_n} \leqslant \pi$. Ainsi,

$$\frac{4(b_n - a_n)}{a_n b_n} \leqslant \frac{\pi(b_0 - a_0)}{4^n} = \frac{\pi(\sqrt{2} - 1)}{4^n} \leqslant \frac{2}{4^n} \quad \text{car } \sqrt{2} - 1 \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } \pi \leqslant 4$$

Compte tenu de la question I.5.b, pour que $\dfrac{4}{b_n}$ soit une valeur approchée à 10^{-8} près, il suffit donc que $\dfrac{2}{4^n} \leqslant 10^{-8}$ soit $2^{2n-1} \geqslant 10^8$ c'est-à-dire $(2n - 1) \ln 2 \geqslant 8 \ln 10$,

$$\boxed{\text{donc } n_0 = \left\lfloor \frac{4 \ln 10}{\ln 2} + 0.5 \right\rfloor + 1 = 14 \text{ convient.}}$$

II . Sous-groupes de $\mathbb{R}$

On admettra dans cette partie que π est un nombre irrationnel, résultat dont la preuve fait l'objet de la partie IV.
On note, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$: $a\mathbb{Z} = \{ka, k \in \mathbb{Z}\}$ puis $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ka + hb, (k, h) \in \mathbb{Z}^2\}$.
On rappelle que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.

II.1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe,
- $0 = a.0 + b.0 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est non vide,
- $\forall (x, y) \in (a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z})^2$, $x - y \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ car x s'écrit $ka + hb$ avec $k, h \in \mathbb{Z}$ et y s'écrit $k'a + h'b$ avec $k', h' \in \mathbb{Z}$ donc $x - y = (k - k')a + (h - h')b \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ car $k - k'$ et $h - h' \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\text{donc } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +).}$$

II.2. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$. On pose $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$.

(a) Pourquoi α est-il bien défini ?

G étant un sous-groupe différent de $\{0\}$, il contient un élément non nul x (car 0, le neutre du groupe ambiant est toujours dans G). De plus, $-x \in G$ car G est un sous-groupe. Ainsi, G contient au moins un élément strictement positif.
Ainsi, $G \cap]0, +\infty[$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{donc } G \cap]0, +\infty[\text{ admet une borne inférieure : } \alpha \text{ est donc bien défini.}}$$

(b) On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que G est alors dense dans $\mathbb{R}$. On pourra adapter la preuve de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ vue en cours.

Prouvons la caractérisation de la densité par les ε.
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixés.
Appliquons la caractérisation de la borne inférieure définissant α pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$:

$$\exists g \in G \cap \mathbb{R}_+^* \ : \ \alpha = 0 \leqslant g < \alpha + \varepsilon = \varepsilon$$

Fixons un tel élément g dans $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Alors $g \in]0, \varepsilon[$.
$g \neq 0$ ce qui permet d'effectuer la division pseudo-euclidienne de x par g :

$$\exists (q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, |g|[\ : \ x = qg + r$$

G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et $g \in G$ donc $qg \in G$ et $|x - qg| = |r| < g < \varepsilon$.
Par conséquent, il existe un élément qg de G ε-proche de x.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \alpha = 0, \text{ alors } G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

(c) On suppose que $\alpha > 0$.

i. Justifier qu'il existe $g \in G$ tel que $\alpha \leqslant g < 2\alpha$.

Appliquons la caractérisation de la borne inférieure définissant α pour $\varepsilon \leftarrow \alpha$ (autorisé car $\alpha > 0$) :

$$\exists g \in G \cap \mathbb{R}_+^* \ : \ \alpha \leqslant g < \alpha + \alpha = 2\alpha$$

Un tel élément g convient.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } g \in G \text{ tel que } \alpha \leqslant g < 2\alpha.}$$

---

ii. Supposons que $\alpha < g$. Montrer qu'il existe $g' \in G$ tel que $0 \leqslant g' < g$ et en déduire une contradiction. Que peut-on en conclure sur α ?

Appliquons une deuxième fois la caractérisation de la borne inférieure définissant α pour $\varepsilon \leftarrow g - \alpha$ (autorisé car $\alpha < g \Rightarrow g - \alpha > 0$) :

$$\exists g' \in G \cap \mathbb{R}_+^* \ : \ \alpha \leqslant g' < \alpha + (g - \alpha) = g$$

Fixons un tel élément g'.
Alors $g - g' > 0$ et $g - g' \in G$ (car G sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$) donc $g - g' \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ si bien que

$$g - g' \geqslant \inf G \cap \mathbb{R}_+^* = \alpha$$

Par ailleurs, $\alpha \leqslant g' < g < 2\alpha$ donc $g - g' < \alpha$ ce qui contredit l'inégalité ci-dessus.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \alpha = g \in G \text{ donc } \alpha = \min G \cap \mathbb{R}_+^*\text{, c'est le plus petit élément strictement positif de } G.}$$

---

iii. Conclure que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

• D'après la question précédente, $\alpha \in G$ donc par stabilité de G pour la loi $+$, puisque c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k\alpha \in G$ d'où $\alpha\mathbb{N} \subset G$.
De plus, G étant un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, il contient les symétriques pour la loi $+$ de tous ses éléments donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pouisque $k\alpha \in G$, $-k\alpha \in G$ si bien que $-\alpha\mathbb{N} \subset G$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \alpha\mathbb{Z} = (\alpha\mathbb{N}) \cup (-\alpha\mathbb{N}) \subset G.}$$

• Réciproquement, soit $g \in G$ fixé.
$\alpha \neq 0$ ce qui permet d'effectuer la division pseudo-euclidienne de g par α :

$$\exists (q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, |\alpha|[\ : \ g = q\alpha + r$$

D'après l'inclusion $\alpha\mathbb{Z} \subset G$, $-q\alpha \in G$ donc $r = g - q\alpha \in G$ (stabilité du sous-groupe G pour la loi $+$). Si $r > 0$, alors $r \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc

$$r \geqslant \inf G \cap \mathbb{R}_+^* = \alpha$$

ce qui contredit $r \in [0, \alpha[$ donc $r = 0$ si bien que $g = q\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G \subset \alpha\mathbb{Z} \text{ d'où, finalement, } G = \alpha\mathbb{Z}.}$$

II.3. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

(a) On suppose que $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ si bien qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$ ($\dfrac{p}{q}$ est appelé le représentant irréductible de $\dfrac{b}{a}$).

i. Montrer que, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $z(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}) = zx\mathbb{Z} + zy\mathbb{Z}$.

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

• Soit $t \in z(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z})$ fixé. Alors il existe $(m, p) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $t = z(xm + yp)$.
On a donc $t = (zx)\underbrace{m}_{\in \mathbb{Z}} + (zy)\underbrace{p}_{\in \mathbb{Z}} \in zx\mathbb{Z} + zy\mathbb{Z}$.
Par conséquent, $z(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}) \subset zx\mathbb{Z} + zy\mathbb{Z}$.

• Soit $u \in zx\mathbb{Z} + zy\mathbb{Z}$ fixé. Alors il existe $(m, p) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $u = zxm + zyp$.
On a donc $u = z(\underbrace{xm}_{\in x\mathbb{Z}} + \underbrace{yp}_{\in y\mathbb{Z}}) \in z(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z})$.
Par conséquent, $zx\mathbb{Z} + zy\mathbb{Z} \subset z(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}) = zx\mathbb{Z} + zy\mathbb{Z}.}$$

---

ii. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$.

Puisque $\dfrac{b}{a} = \dfrac{p}{q}$, $b = \dfrac{pa}{q}$ donc, en utilisant la question précédente pour $(x, y, z) \leftarrow (q, p, a/q)$

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + \frac{pa}{q}\mathbb{Z} = \frac{a}{q}(q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z})$$

De plus,

⋆ d'une part, $(q, p) \in \mathbb{Z}^2$ donc $q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

⋆ d'autre part, $p \wedge q = 1$ donc il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $uq + vp = 1$ donc

$$\forall m \in \mathbb{Z}\ ,\ m = m \times 1 = \underbrace{mu}_{\in \mathbb{Z}} q + \underbrace{mv}_{\in \mathbb{Z}} p \in q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} \qquad \text{si bien que } \mathbb{Z} \subset q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, $q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ce qui permet de conclure à l'égalité

$$\boxed{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{a}{q}\mathbb{Z}.}$$

(b) On suppose que $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$.

i. Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$, alors $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.

Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$.
$a = a \times 1 + b \times 0$ donc il existe $m_a \in \mathbb{Z} : a = \alpha m_a$.
$b = a \times 0 + b \times 1$ donc il existe $m_b \in \mathbb{Z} : b = \alpha m_b$.
Puisque, $a \neq 0$ par hypothèse, $m_a \neq 0$ donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{m_b \alpha}{m_a \alpha} = \dfrac{m_b}{m_a} \in \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, s'il existe } \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tel que } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}, \text{ alors } \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}.}$$

---

ii. Que peut-on en conclure concernant $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$?

D'après la question II.1, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
De plus, ce sous-groupe est différent de $\{0\}$ car il contient l'élément a et $a \neq 0$.
Or nous avons prouvé dans la question II.2, qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$ est, selon que la borne inférieure α de l'ensemble de ses éléments strictement positifs est nulle ou pas,

⋆ soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$,
⋆ soit dense dans $\mathbb{R}$.

Nous avons supposé en début de question que $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, donc s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$, alors la réponse à la question précédente établit une contradiction,
ce qui signifie qu'il n'existe pas de réel non nul α tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$,

$$\boxed{\text{donc } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

II.4. On pourra utiliser dans la question qui suit la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ,\ \text{si } (u_n) \text{ converge vers } x_0, \text{ alors } (f(u_n)) \text{ converge vers } f(x_0)$$

(a) i. Soient D une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f(D)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.

Utilisons la caractérisation séquentielle de la densité.
Tout d'abord, puisque $D \subset \mathbb{R}$, $f(D) \subset f(\mathbb{R})$.
Soit $y \in f(\mathbb{R})$ fixé.
Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.
Par densité de D dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (d_n) d'éléments de D qui converge vers x.
Par conséquent, la suite $(f(d_n))$ est une suite d'éléments de $f(D)$ qui converge vers $f(x) = y$ par continuité de f en x.
Ainsi, nous avons exhibé une suite d'éléments de $f(D)$ qui converge vers y,

$$\boxed{\text{par conséquent, } f(D) \text{ est dense dans } f(\mathbb{R}).}$$

---

ii. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire une condition suffisante sur $\dfrac{\theta}{\pi}$ pour que la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ soit dense dans $[-1, 1]$. On pourra s'intéresser au sous-groupe $2\pi\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$.

Supposons que $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. D'après la question II.3(b) appliquée pour $(a, b) \leftarrow (2\pi, \theta)$, ce qui est autorisé car $\dfrac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ (sinon $\dfrac{\theta}{\pi} = 2 \times \dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse faite ci-dessus), donne la densité de $2\pi\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$,
or la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$,
donc le résultat de la question II.4((a))i, appliqué pour $f \leftarrow \sin$ et $D \leftarrow 2\pi\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ établit la densité de $\sin(2\pi\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z})$ dans $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
Par 2π-péridicité de la fonction sinus, $\sin(2\pi\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) = \sin(\theta\mathbb{Z})$ donc $\sin(\theta\mathbb{Z}) = \{\sin(n\theta) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}, \text{ alors } (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est dense dans } [-1, 1].}$$

(b) i. Montrer que, pour tout rationnel r, $\sin(r\pi\mathbb{Z})$ est un ensemble fini.

$r \in \mathbb{Q}$ donc il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$.

$$\sin(r\pi\mathbb{Z}) = \left\{\sin\left(\frac{np}{q}\pi\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \left\{\sin\left(\frac{r}{q}\pi\right) \mid r \in [\![0, 2q-1]\!]\right\}$$

car, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en effectuant la division euclidienne de np par q (autorisé car $q \neq 0$),

$\exists(m, r)\mathbb{Z} \times [\![0, 2q-1]\!]\ :\ np = m2q + r$ si bien que $\sin\left(\dfrac{np}{q}\pi\right) = \sin\left(\dfrac{2mq+r}{q}\pi\right) = \sin\left(2\pi + \dfrac{r}{q}\pi\right) = \sin\left(\dfrac{r}{q}\pi\right)$

L'ensemble $\left\{\sin\left(\dfrac{r}{q}\pi\right) \mid r \in [\![0, 2q-1]\!]\right\}$ est fini de cardinal inférieur ou égal à $2q$ et toute partie d'un ensemble fini est également finie donc $\sin(r\pi\mathbb{Z})$ est fini.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout rationnel } r,\ \sin(r\pi\mathbb{Z}) \text{ est un ensemble fini.}}$$

---

ii. En déduire que la condition suffisante établie dans la question précédente est nécessaire et déterminer l'ensemble $\mathcal{I}_\pi$ des valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

• Supposons que $\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$. Alors il exsite $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\theta = r\pi$ donc les éléments de la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}} = (\sin(nr\pi))_{n\in\mathbb{Z}}$ constituent l'ensemble $\sin(r\pi\mathbb{Z})$ qui, d'après la question précédente est une partie finie de $[-1, 1]$ si bien qu'en notant $N \in \mathbb{N}^*$ son cardinal ($N \geqslant 1$ car $0 \sin(0 \times r\pi)$ est un élément de la famille pour $n = 0$), on peut ordonner les N éléments de cette famille $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$. On en déduit que l'intervalle ouvert $]s_1, s_2[$ intersecte $[-1, 1]$ (il est même inclus dans $[-1, 1]$) et pourtant il ne contient aucun élément de la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ donc elle n'est pas dense dans $[-1, 1]$. En contraposant, si $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1, 1]$, alors $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

• Dans la question II.4((a))ii, nous avons établi que si $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, alors $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est dense dans } [-1,1] \iff \frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}\text{ , équivalence qui se reformule en } \mathcal{I}_\pi = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.}$$

III . Etude de la suite $\big(\sin(n\theta)\big)$

On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sin(n\theta)$.
Considérons l'équation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n \tag{E}$$

dans laquelle u est une suite réelle.

III.1. (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_\theta$ des suites réelles solutions de la relation de récurrence (E) en fonction de θ (on prendra soin de distinguer deux situations différentes selon les valeurs de θ).

L'équation caractéristique de la relation de récurrence (E) est $r^2 - 2(\cos\theta)r + 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$.

$$-4\sin^2\theta = 0 \iff \sin\theta = 0 \iff \theta \equiv 0\ [\pi]$$

⋆ Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, alors $\Delta = (2i\sin\theta)^2 < 0$ donc l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées non rélles qui sont

$$\frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = e^{-i\theta}$$

donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_\theta = \{(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

⋆ Si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, alors $\Delta = 0$ donc l'équation caractéristique admet une racine double qui est $\cos\theta$ si bien que

$$\mathcal{S}_\theta = \{((\lambda + \mu n)\cos^n(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}\ .$$

Observons alors que, dans ce cas, $\cos\theta$ vaut 1 ou -1 selon la congruence de θ modulo 2π.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \mathcal{S}_\theta = \begin{cases} \{(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} & \text{si } \theta \not\equiv 0\ [\pi], \\ \{(\lambda + \mu n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} & \text{si } \theta \equiv 0\ [2\pi], \\ \{((\lambda + \mu n)(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} & \text{si } \theta \equiv \pi\ [2\pi]. \end{cases}}$$

(b) Supposons que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. En utilisant la relation de récurrence (E), montrer que, si une suite $u \in \mathcal{S}_\theta$ converge, alors sa limite est nulle.

Soit $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ tel que (s_n) converge. Notons ℓ la limite de (s_n).

La relation de récurrence (E) donne

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad \underbrace{u_{n+2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \ell} = \underbrace{2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ 2(\cos\theta)\ell - \ell}$$

donc, par unicité de la limite,

$$\ell = 2(\cos\theta)\ell - \ell \quad \text{donc } (\cos\theta - 1)\ell = 0 \quad \text{donc} \quad \ell = 0 \text{ (car } \theta \not\equiv 0\ [2\pi] \Rightarrow \cos\theta \neq 1)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, lorsque } \theta \not\equiv 0\ [2\pi], \text{ si } u \in \mathcal{S}_\theta \text{ converge, alors } \lim u = 0.}$$

(c) On se place dans le cas $\theta \equiv 0\ [2\pi]$. Quelles sont les limites des suites convergentes de l'ensemble $\mathcal{S}_\theta$?

Dans le cas $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, $\mathcal{S}_\theta = \{(\lambda + \mu n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Soit $u \in \mathcal{S}_\theta$. Alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \lambda + \mu n$$

- ⋆ Si $\mu > 0$, $\lim u = +\infty$,
- ⋆ Si $\mu < 0$, $\lim u = -\infty$,
- ⋆ Si $\mu = 0$, $\lim u = \lambda$.

Par conséquent, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, la suite constante de valeur ℓ appartient à $\mathcal{S}_\theta$ (pour $(\lambda, \mu) \leftarrow (\ell, 0)$) et elle converge vers ℓ.

$$\boxed{\text{Dans le cas } \theta \equiv 0\ [2\pi], \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{R} \text{ il existe une (unique) suite de } \mathcal{S}_\theta \text{ qui converge vers } \ell.}$$

III.2. (a) Montrer que la suite (s_n) est une solution de (E). Montrer que si (s_n) converge, alors sa limite est 0.

Deux options :
• Ou bien, on calcule pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$s_{n+2} - s_n = \sin((n+2)\theta) - \sin(n\theta) = \sin((n+1)\theta + \theta) - \sin((n+1)\theta - \theta) = 2\sin((n+1)\theta)\cos\theta$$

Et donc $s_{n+2} = 2\cos\theta s_{n+1} + s_n$. Ainsi (s_n) est une solution de (E). (ceci est vrai, même si $\theta = 0$)
• Ou bien, on constate que si $\theta \not\equiv 0[\pi]$, $(s_n) \in \mathcal{S}_\theta$, selon la description de cet ensemble.
et si $\theta \equiv 0[\pi]$, pour tout entier n, $s_n = 0$, et donc $(s_n) \in \mathcal{S}_\theta$, selon la description de cet ensemble.

$$\boxed{(s_n) \text{ est une solution de (E).}}$$

On peut alors utiliser la réponse à la question 1.(b), dans le cas où $\theta \not\equiv 0[\pi]$. On a donc (s_n) qui converge vers 0.
Et dans le cas où $\theta \equiv 0[\pi]$, (s_n) est constante, nulle, donc (s_n) qui converge vers 0

$$\boxed{\text{Bilan : si } (s_n) \text{ converge, alors sa limite est } 0.}$$

(b) Montrer, en exprimant (s_{n+1}) en fonction des suites (s_n) et $(\cos(n\theta))$, que pour $\theta \not\equiv 0[\pi]$ et si (s_n) converge, alors $(\cos(n\theta))$ converge aussi vers 0.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+1} = \sin((n+1)\theta) = \sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta$$

On sait, par hypothèse que la suite (s_n) converge (donc vers 0), et que $\theta \not\equiv 0[\pi]$, donc $\sin\theta \neq 0$:

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{\sin\theta}(s_{n+1} - \cos\theta \times s_n)$$

Et par addition de suites convergentes, dont on connait les limites nulles :

$$\boxed{\text{Si } \theta \not\equiv 0[\pi] \text{ et si } (s_n) \text{ converge, alors } \big((\cos(n\theta))\big)_n \text{ converge vers } 0}$$

(c) Déterminer l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles la suite (s_n) converge.

Si $\theta \not\equiv 0[\pi]$,
alors si (s_n) converge, alors $(c_n)\big(:= (\cos(n\theta))_n\big)$ converge également vers 0 (question précédente).
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ $s_n^2 + c_n^2 = 1$. En passant à la limite, on aurait $0 + 0 = 1$ (unicité de la limite). Impossible.
On a une contradiction, donc $\theta \equiv 0[\pi]$.
Pour ce dernier cas, on a vu dans le corps de la réponse à la question 2.(a) que (s_n) est constante égale à 0 donc convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (s_n) \text{ converge si et seulement si } \theta \equiv 0[\pi] \text{ (et dans ce cas } (s_n) \to 0.)}$$

III.3. Convergence « à la Euler ».

On dit qu'une suite (a_n) est Euler-convergente si la suite (A_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$, est convergente.

On note alors $\lim_E(a_n)$, la valeur $\lim(A_n)$.

(a) Montrer que si (a_n) est une suite constante, alors (a_n) est Euler-convergente et $\lim\limits_E(a_n) = \lim(a_n)$.

Supposons que (a_n) est constante égale à ℓ.
Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ell = \frac{\ell}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = \frac{\ell}{2^n}(1+1)^n = \ell$$

$$\boxed{(A_n) \text{ est constante égale à } \ell \text{ également, donc convergente et } \lim(A_n) = \lim_E(a_n) = \lim a_n (= \ell).}$$

(b) Soit (a_n) est une suite convergente vers 0.

i. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $\left|\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k|$.

Puisque (a_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|a_n - 0| = |a_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Puis, on découpe la somme en deux parties (Chasles) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}a_k + \sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}a_k$.
Enfin, on applique l'inégalité triangulaire. Pour tout $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| &\leqslant \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}a_k\right| + \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k| \\
&\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k| \quad \text{car pour } k \in [\![N+1, n]\!],\ |a_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$ est une somme de termes strictement positifs, elle est nécessairement plus petite que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$, qui contient les mêmes termes et d'autres positifs.
On a donc

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{2^n}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ce qui donne le résultat attendu :

$$\boxed{\text{il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout entier } n \geqslant N,\ \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k|.}$$

---

ii. En déduire que (a_n) est Euler-convergente et $\lim\limits_E(a_n) = 0$.

N est fixé. Il est connu que la suite finie $\left(\dbinom{m}{k}\right)_k$ est croissante pour k de 0 à $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ puis décroissante.
Donc si $n \geqslant 2N$, pour tout $k \leqslant N$, $\dbinom{n}{k} \leqslant \dbinom{n}{N}$.
Par la suite, on considère donc $n \geqslant 2N$.
On a alors, en notant $A = \max(|a_0|, |a_1|, \dots |a_N|)$

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k| \leqslant \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}A = A\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{N} = A(N+1)\binom{n}{N}$$

Et par ailleurs

$$\binom{n}{N} = \frac{n!}{(n-N)!} \times \frac{1}{N!} = \frac{1}{N!}\prod_{k=n-N+1}^{n}k \leqslant \frac{1}{N!}\prod_{k=n-N+1}^{n}n = \frac{n^N}{N!}$$

On a donc comme majorant pour $n \geqslant 2N$:

$$0 \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k| \leqslant \frac{A}{N!}\frac{n^N}{2^n}$$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^N}{2^n} = 0$,

donc par comparaison de suite : $\left(\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{N}\dbinom{n}{k}|a_k|\right)_n$ converge vers 0.

Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geqslant 2N$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$: $\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{N}\dbinom{n}{k}|a_k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, en reprenant la réponse à la question précédente, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N_1$, $\left|\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a_k\right| \leqslant \varepsilon$.

Ce résultat est vrai, pour tout ε. Donc

$$\boxed{(a_n) \text{ est Euler-convergente et } \lim_E(a_n) = 0.}$$

(c) Que dire de l'Euler-convergence d'une suite (a_n) convergente.

Supposons que (a_n) converge vers ℓ, alors $(u_n) := (a_n - \ell)$ est une suite qui converge vers 0.
D'après la question précédente, (u_n) « Euler-converge » vers 0 également.
Or le calcul donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k-\ell) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k - \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ell = \left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right) - \ell$$

Autrement écrit :

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k + \ell$$

Et par somme de suites convergentes : $\left(\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a_k\right)$ converge vers la somme des limites $0+\ell=\ell$.

$$\boxed{\text{Si } (a_n) \text{ converge, alors elle converge également au sens d'Euler et } \lim_E(a_n) = \lim(a_n).}$$

(d) Montrer que (s_n) est Euler-convergente et que $\lim\limits_E(s_n) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^k\right)$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^k = \left(e^{i\theta}+1\right)^n = \left(e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}\right)\right)^n = e^{ni\theta/2}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$$

Ainsi, en prenant la partie imaginaire :

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_n = \frac{1}{2^n}2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right) = \cos^n\frac{\theta}{2}\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

• si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors $\dfrac{\theta}{2} \equiv 0[\pi]$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\dfrac{\theta}{2} \equiv 0[n\pi]$, donc $\sin\left(n\dfrac{\theta}{2}\right) = 0$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}s_n = 0$ donc cette suite converge et sa limite vaut 0.

• si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, alors $\dfrac{\theta}{2} \not\equiv 0[\pi]$ et donc $\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| < 1$.

Or : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\cos^n\dfrac{\theta}{2}\sin\left(n\dfrac{\theta}{2}\right)\right| \leqslant \left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|^n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|^n = 0$ car $\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| < 1$.

Par comparaison, ces suites, positives, convergent vers 0.

Dans tous les cas (quelle que soit la valeur de θ) :

$$\boxed{(s_n) \text{ est Euler-convergente et } \lim_E(s_n) = 0.}$$

La suite (s_n) prouve donc que la réciproque de la question précédente est fausse.
D'une certaine façon, si (s_n) devait converger, nécessairement cela serait vers 0, puis que (s_n) converge au sens d'Euler vers 0.

III.4. Equidistribution.

On dit qu'une suite (a_n) dense dans $[c,d]$ est équidistribuée si :

$$\forall\, \gamma,\delta \in [c,d] \text{ tels que } \gamma<\delta,\ \lim \frac{\operatorname{card}\big(\{n \in [\![0,n-1]\!] \mid a_n \in [\gamma,\delta]\}\big)}{n} = \frac{\delta-\gamma}{d-c}.$$

On admet que cela *impose* que pour toute fonction f continue sur $[c,d]$, on a $\displaystyle\frac{1}{d-c}\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(a_k)$.

Dans la suite de cette question $\theta \in \mathcal{I}_\pi$ et l'on admet que la densité de la suite (s_n) dans $[-1,1]$ peut se déduire de celle de la famille $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$.

(a) Avec $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, calculer $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_k)$. Qu'en pensez-vous ?

Avec la fonction identité, on a d'une part :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1-1) = 0$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sin(n\theta) = \frac{1}{n+1}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^n\right) = \frac{1}{n+1}\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$$

en appliquant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$: $e^{i\theta}=1$ donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc $\dfrac{\theta}{\pi} \in 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ce qui est exclu par la condition $\theta \in \mathcal{I}_\pi$ puisque $\mathcal{I}_\pi = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_n) = \frac{1}{n+1}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta/2}(e^{-i(n+1)\theta/2}-e^{i(n+1)\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\mathrm{Im}(e^{in\theta/2})$$

Donc

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_n)\right| = \left|\frac{1}{n+1}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

Or ce dernier majorant converge vers 0, donc par comparaison, $\displaystyle\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_n)\right)_n$ converge et sa limite est nulle.

$$\boxed{\text{Avec l'identité } \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_n) = 0, \textit{ il n'y a pas d'obstacle} \text{ pour que } (s_n) \text{ soit équidistribuée.}}$$

(b) Avec $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, calculer $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_k)$. Qu'en pensez-vous ?

Avec la fonction carré, on a d'une part :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}(1-(-1)) = \frac{1}{3}$$

et d'autre part, en exploitant la linéarisation : $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(s_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sin^2(n\theta) = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(1-\cos(2n\theta)) = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}1 - \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\cos(2n\theta)$$

Le première des deux sommes vaut $\dfrac{n+1}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2}$.

Quant à la seconde, le principe du calcul est comme pour la question précédente :

$$\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\cos(2n\theta) = \frac{1}{2(n+1)}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{2i\theta}\right)^n\right) = \frac{1}{2(n+1)}\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{2i(n+1)\theta}}{1-e^{2i\theta}}\right)$$

en appliquant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$: $\theta \in \mathcal{I}_\pi$, donc $\theta \not\equiv 0[\pi]$ donc $e^{2i\theta} \neq 1$.

$$\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\cos(2n\theta) = \frac{1}{2(n+1)}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}(e^{-i(n+1)\theta}-e^{i(n+1)\theta})}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-e^{i\theta})}\right) = \frac{1}{2(n+1)}\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}\cos(n\theta)$$

Donc

$$\left|\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\cos(2n\theta)\right| \leqslant \frac{1}{2(n+1)\left|\sin\theta\right|}$$

Or ce dernier majorant converge vers 0, donc par comparaison, $\left(\dfrac{1}{2(n+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2n\theta)\right)_n$ converge vers 0, puis par addition : $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f(s_n)\right)_n$ converge et sa limite est $\dfrac{1}{2}(+0)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Avec } f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2,\ \dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t\neq\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(s_n)=\dfrac{1}{2}.\\ \text{Donc, } (s_n) \text{ n'est pas équidistribuée.}\end{array}}$$

IV . Irrationnalité de π

L'objectif de cette partie est d'établir l'irrationnalité du nombre π.

Pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x)=\dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

IV.1. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

(a) Montrer qu'il existe $(n+1)$ entiers e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n} que l'on explicitera tels que $f_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n}e_ix^i$.

En développant $(1-x)^n=((-x)+1)^n$ avec la formule du binôme de Newton,

$$f_n(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}=\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kx^k\times1^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kx^{n+k}=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}\binom{n}{i-n}(-1)^{i-n}x^i$$

$$\boxed{\text{En posant } \forall i\in[\![n,2n]\!],\ e_i=\binom{n}{i-n}(-1)^{i-n},\ e_i \text{ est entier car les coefficients binomiaux sont entiers et } f_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}e_ix^i.}$$

(b) Calculer,
- pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, $f_n^{(k)}(0)$,
- pour $k\in[\![n,2n]\!]$, $f_n^{(k)}(0)$ en fonction de k, n et e_k,
- pour $k\in[\![2n+1,+\infty[\![$, $f_n^{(k)}(0)$.

Soit $i\in\mathbb{N}$. Observons que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(x\mapsto x^i)^{(k)}=\begin{cases}x\mapsto\dfrac{i!}{(i-k)!}x^{i-k} & \text{si } k\in[\![0,i-1]\!], & (a)\\ x\mapsto i! & \text{si } k=i, & (b)\\ x\mapsto 0 & \text{si } k>i. & (c)\end{cases}$

⋆ Si $k\in[\![0,n-1]\!]$, par linéarité de la dérivation,

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}e_i\times\frac{i!}{(i-k)}x^{i-k}\quad\text{(on est toujours dans le cas } (a) \text{ des formules ci-dessus)}$$

donc

$$f_n^{(k)}(0)=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}e_i\times\frac{i!}{(i-k)}\times\underbrace{0^{i-k}}_{=0\text{ car } i-k\in\mathbb{N}^*}=0$$

⋆ Si $k\in[\![n,2n]\!]$, par linéarité de la dérivation, en découpant la somme en trois parties pour distinguer les 3 cas (a), (b) et c,

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\left(\sum_{\substack{i\in[\![n,k-1]\!]\\ \text{cas } (c)}}e_i\times0+e_k\times\underbrace{k!}_{\text{cas } (b)}+\sum_{\substack{i\in[\![k+1,2n]\!]\\ \text{cas } (a)}}e_i\times\frac{i!}{(i-k)}x^{i-k}\right)$$

donc

$$f_n^{(k)}(0)=\frac{1}{n!}\left(0+e_kk!+\sum_{i=k+1}^{2n}e_i\times\frac{i!}{(i-k)}\times\underbrace{0^{i-k}}_{=0\text{ car } i-k\in\mathbb{N}^*}\right)=\frac{k!}{n!}e_k$$

⋆ Si $k\in[\![2n+1,+\infty[\![$, par linéarité de la dérivation,

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}e_i\times0=0\quad\text{(on est toujours dans le cas } (c) \text{ des formules ci-dessus)}$$

donc

$$f_n^{(k)}(0)=0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N},\ f_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0, n-1]\!], \\ \dfrac{k!}{n!} e_k & \text{si } k \in [\![n, 2n]\!], \\ 0 & \text{si } k \in [\![2n+1, +\infty[\![. \end{cases}}$$

(c) En déduire que, pour tout entier naturel k, $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers. On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. En reprenant les formules établies dans la question précédente,
  - ⋆ si $k \in [\![0, n-1]\!] \cup [\![2n+1, +\infty[\![$, $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$,
  - ⋆ si $k \in [\![n, 2n]\!]$, $f_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{n!} \underbrace{e_k}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ car $\dfrac{k!}{n!} = k(k-1)\dots(n+1) \in \mathbb{N}$ (puisque $k > n$).

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier naturel } k,\ f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}.}$$

- Observons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(1-x) = \frac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} = \frac{(1-x)^n x^n}{n!} = f_n(x)$$

donc en dérivant k-fois les deux membres (qui sont infiniment dérivables en tant que fonctions polynomiales),

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (t \mapsto f_n(1-t))^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(x)$$

et en notant que la dérivée composée du membre de gauche $f_n \circ (t \mapsto 1-t)$ fait apparaître un facteur $-1 = (t \mapsto 1-t)'$ à chaque itération de la dérivation : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ (t \mapsto f_n(1-t))^{(k)} = t \mapsto (-1)^k f_n^{(k)}(1-t)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (-1)^k f_n^{(k)}(1-x) = f_n^{(k)}(x)$$

si bien qu'en particularisant pour $x \leftarrow 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k f_n^{(k)}(0) = f_n^{(k)}(1)$, or $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ d'après la première partie de la réponse,

$$\boxed{\text{donc, pour tout entier naturel } k,\ f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}.}$$

On veut montrer que π^2 est un nombre irrationnel. Nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$.

IV.2. Posons, pour n entier naturel non nul et x réel,

$$F_n(x) = b^n(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2k)}(x)$$

(a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

En évaluant en 0, puis en 1 et en utilisant que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$

$$F_n(0) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} f_n^{(2k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times \underbrace{a^{n-k}}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{car } a \in \mathbb{N}^* \text{ et } n-k \in \mathbb{N}}} \times \underbrace{b^k}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{car } b \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \in \mathbb{N}}} \times \underbrace{f_n^{(2k)}(0)}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{quest. précèdente}}} \in \mathbb{Z}$$

En évaluant en 1, on procède de la même manière,

$$F_n(1) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} f_n^{(2k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times \underbrace{a^{n-k}}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{car } a \in \mathbb{N}^* \text{ et } n-k \in \mathbb{N}}} \times \underbrace{b^k}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{car } b \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \in \mathbb{N}}} \times \underbrace{f_n^{(2k)}(1)}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{quest. précèdente}}} \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_n(0) \text{ et } F_n(1) \text{ sont des entiers.}}$$

(b) On pose, pour n entier naturel non nul et x réel,

$$g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x) \quad \text{et} \quad A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$

Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel, $g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$ et en déduire que A_n est un entier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- F_n est une combinaison linéaire de fonctions polynomiales donc F_n est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ ce qui valide la définition de g_n (car F_n' a bien un sens).
Les fonctions sinus, cosinus et les fonctions linéaires sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par stabilité de la dérivabilité par composition, $\sin\circ(x\mapsto \pi x)$ et $\cos\circ(x\mapsto\pi x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Enfin, par stabilité de la dérivabilité par produit et combinaison linéaire, g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ g_n'(x)=F_n''(x)\sin(\pi x)+\underbrace{F_n'(x)\pi\cos(\pi x)-\pi F_n'(x)\cos(\pi x)}_{=0}-\pi F_n(x)(-\pi)\sin(\pi x)=\sin(\pi x)\left(F_n''(x)+\pi^2F_n(x)\right)$$

or

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ F_n''(x)+\pi^2F_n(x)=F_n''(x)+\frac{a}{b}F_n(x) &= b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k}f_n^{(2k+2)}(x)+\frac{a}{b}b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k}f_n^{(2k)}(x)\\ i=k+1 &= b^n\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-i+1}f_n^{(2i)}(x)+b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1-k}f_n^{(2k)}(x)\\ &= b^n(-1)^n\left(\frac{a}{b}\right)^0f_n^{(2(n+1))}(x)+b^n(-1)^0\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1-0}f_n^{(0)}(x)\end{aligned}$$

après télescopage, lorsqu'il ne reste que le terme pour $i=n+1$ dans la première somme et celui pour $k=0$ dans la seconde.
Par conséquent, en observant que $f_n^{(2n+2)}$ est la fonction nulle (car f_n est polynomiale de degré $2n$) et que $f_n^{(0)}=f_n$

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ F_n''(x)+\pi^2F_n(x)=b^n\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}f_n(x)=\frac{a}{b}\times a^nf_n(x)=\pi^2a^nf_n(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, }\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g_n'(x)=\pi^2a^nf_n(x)\sin(\pi x).}$$

Remarque : le raisonnement proposé en début de question pour montrer que g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ s'adapte en remplaçant « dérivable » par « de classe $\mathcal{C}^1$ » et permet de conclure que g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Cette propreté de régularité est utilisée dans la suite de la question.

- En injectant le résultat ci-dessus dans la définition de A_n,

$$A_n=\pi\int_0^1a^nf_n(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^1g_n'(x)\mathrm{d}x\underbrace{=}_{g_n\text{ est de classe }\mathcal{C}^1}\left[\frac{g_n(x)}{\pi}\right]_0^1=\frac{g_n(1)-g_n(0)}{\pi}$$

Or, par définition de g_n, sachant que $\sin(\pi)=\sin(0)=0$, $\cos(0)=1$ et $\cos(\pi)=-1$, $\boxed{g_n(1)=\pi F_n(1)}$ et $\boxed{g_n(0)=-\pi F_n(0)}$ si bien que $A_n=F_n(1)+F_n(0)\in\mathbb{Z}$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi, }\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A_n\text{ est un entier.}}$$

IV.3. On pose, toujours pour le même entier a, $u_n=\dfrac{a^n}{n!}$.

(a) Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant a+1$, $\dfrac{a^n}{n!}\leqslant\dfrac{a^{a+1}}{a!n}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant a+1$.

$$\frac{a^n}{n!}=\prod_{k=1}^{n}\frac{a}{k}=\prod_{k=1}^{a}\frac{a}{k}\times\prod_{k=a+1}^{n}\frac{a}{k}=\frac{a^a}{a!}\times\frac{a}{n}\prod_{k=a+1}^{n-1}\underbrace{\frac{a}{k}}_{\leqslant 1}\leqslant\frac{a^{a+1}}{a!n}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier }n\geqslant a+1,\ \frac{a^n}{n!}\leqslant\frac{a^{a+1}}{a!n}.}$$

(b) En déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n\geqslant n_0$, $\dfrac{a^n}{n!}<\dfrac{1}{2}$.

Reprenons la majoration établie dans la question précédente et utilisons que la suite u est à termes positifs :

$$\forall n\geqslant a+1\ ,\ 0\leqslant u_n\leqslant\underbrace{\frac{a^{a+1}}{a!}\times\frac{1}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

Les deux membres extrême de l'encadrement ci-dessus ont la même limite finie égale à 0 lorsque $n\to+\infty$ donc le théorème d'existence de limite par encadrement permet d'affirmer que la suite u converge et que sa limite est 0.
Appliquons la définition de la convergence de u vers 0 pour $\varepsilon\leftarrow\dfrac{1}{4}$:

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geqslant n_0\Rightarrow|u_n-0|\leqslant\frac{1}{4}$$

Fixons un tel n_0.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$.

$$u_n \underbrace{=}_{u_n \geqslant 0} |u_n - 0| \underbrace{\leqslant}_{n \geqslant n_0} \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe un entier naturel } n_0 \text{ tel que, pour tout entier } n \geqslant n_0,\ \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2}.}$$

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$ et $\forall x \in [1/4, 3/4]$, $f_n(x) \geqslant \dfrac{3^n}{n!2^{4n}}$.

- Soit $x \in [0,1]$ fixé.
On a $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$ si bien qu'en effectuant les produits termes à termes de ces inégalités entre nombres tous positifs ou nuls, $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$,
donc, par croissance de la fonction « puissance n » sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant x^n(1-x)^n \leqslant 1^n = 1$,
donc, en multipliant par $\dfrac{1}{n!} \geqslant 0$ (ce qui préserve le sens des inégalités),

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1],\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}.}$$

- $x \mapsto x(1-x)$ est un trinôme du second degré dont le sommet a pour abscisse $1/2$ qui est le milieu du segment $[1/4, 3/4]$.
De plus ce trinôme admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$ et $+\infty$ donc il admet une valeur maximale en $1/2$ donc, par symétrie,

$$\forall x \in [1/4, 3/4]\ ,\ x(1-x) \geqslant \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2^4}$$

Par croissance de la fonction « puissance n » sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall x \in [1/4, 3/4]\ ,\ x^n(1-x)^n \geqslant \frac{3^n}{2^{4n}}$$

donc, en multipliant par $\dfrac{1}{n!} \geqslant 0$ (ce qui préserve le sens des inégalités),

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [1/4, 3/4],\ f_n(x) \geqslant \frac{3^n}{n!2^{4n}}.}$$

(d) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $A_n \in]0,1[$ et conclure que π^2 est irrationnel.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'une part, $\pi a^n \sin(\pi x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et, d'autre part, d'après la question précédente, $f_n(x) \geqslant 0$ sur $[0,1]$ donc

$$\begin{aligned}
A_n &= \underbrace{\int_0^{1/4} \pi f_n(x) a^n \sin(\pi x) \mathrm{d}x}_{\geqslant 0 \text{ car } \pi f_n(x) a^n \sin(\pi x) \geqslant 0} + \int_{1/4}^{3/4} \pi f_n(x) a^n \sin(\pi x) \mathrm{d}x + \underbrace{\int_{3/4}^{1} \pi f_n(x) a^n \sin(\pi x) \mathrm{d}x}_{\geqslant 0 \text{ car } \pi f_n(x) a^n \sin(\pi x) \geqslant 0} \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&\geqslant \int_{1/4}^{3/4} \pi f_n(x) a^n \sin(\pi x) \mathrm{d}x \\
&\geqslant a^n \frac{3^n}{n!2^{4n}} \int_{1/4}^{3/4} \pi \sin(\pi x) \mathrm{d}x \quad \text{en utilisant la minoration de } f_n \text{ sur } [1/4, 3/4] \\
&\geqslant a^n \frac{3^n}{n!2^{4n}} \left(2 \cos \frac{\pi}{4}\right) = a^n \frac{3^n}{n!2^{4n}} \sqrt{2} > 0
\end{aligned}$$

- Soit $n \geqslant n_0$.

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ \pi a^n \sin(\pi x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}$$

donc, par produit des membres d'une inégalité par un terme positif ou nul,

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ \pi f_n(x) a^n \sin(\pi x) \leqslant \frac{\pi a^n \sin(\pi x) 1}{n!}$$

si bien qu'en intégrant entre 0 et 1, par croissance de l'intégrale,

$$\underbrace{\int_0^1 \pi f_n(x) a^n \sin(\pi x) \mathrm{d}x}_{= A_n} \leqslant \underbrace{\frac{a^n}{n!}}_{< \frac{1}{2} \text{ car } n \geqslant n_0} \times \underbrace{\int_0^1 \pi \sin(\pi x) \mathrm{d}x}_{= [-\cos(\pi x)]_0^1 = 2} < 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier } n \geqslant n_0,\ A_n \in]0,1[.}$$

D'après la conclusion ci-dessus, $A_{n_0} \in]0,1[$, or nous avons établi dans la question IV.2(b) que $A_{n_0} \in \mathbb{Z}$ ce qui est une contradiction car $]0,1[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \pi^2 \text{ est irrationnel.}}$$

(e) Comment peut-on déduire de ce qui précède que π est irrationnel ?

Par l'absurde, si l'on suppose que π est rationnel, alors son carré est aussi rationnel (l'ensemble des rationnels est stable par produit) ce qui contredit la conclusion de la question précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \pi \text{ est un nombre irrationnel.}}$$
