# Devoir Surveillé n°6

Sujet donné le mercredi 12 février 2025, 3h.
**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

## Problème - Théorèmes de Bernstein pour les fonctions absolument monotones

Ce problème est composé de 3 parties.

Objectifs :
Le but est d'étudier les fonctions absolument monotones. Nous verrons en première partie qu'elles sont suffisamment présentes pour ne pas être anecdotiques. En seconde partie, nous verrons un premier théorème de Bernstein qui donne une égalité étendue entre les fonctions absolument monotones et leur développement de Taylor. En troisième partie, nous étudierons quelques propriétés topologiques d'un ensemble de fonctions absolument monotones.

Notations :
- Si une fonction $f$ est indéfiniment dérivable sur un intervalle $I$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sa dérivée $n$-ième est notée $f^{(n)}$. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.
- Dans tout le problème, $I$ est un intervalle contenant au moins deux points distincts.
- Sauf mention contraire, $a$ et $b$ sont des éléments de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $a < b$.
- On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble (espace vectoriel) des fonctions définies sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définitions :
- Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle ouvert $I = ]a, b[$.
  $f$ **est absolument monotone sur** $]a, b[$ si
  $(i)$ $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$,
  $(ii)$ $\forall x \in ]a, b[, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \geqslant 0$ .
- On note $\mathcal{A}(I)$ l'ensemble des fonctions absolument monotones sur l'intervalle $I$.

- On dit qu'une partie $K$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est **convexe** si elle vérifie :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \ , \ \forall f, g \in K \ , \quad (1 - \lambda)f + \lambda g \in K$$

## I . Manipulations de fonctions absolument monotones

Dans cette partie, $I$ est un intervalle ouvert que l'on pourra noter $]a, b[$ si nécessaire (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

I.1. Montrer que $x \mapsto e^x$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}$.

I.2. Soit $f$ une fonction absolument monotone sur $I$. Que peut-on dire du signe de $f$ ? de ses variations ? de sa convexité ?

I.3. Justifier qu'une fonction $f$ est absolument monotone sur $I$ si et seulement si elle est positive et dérivable sur $I$ et sa fonction dérivée est absolument monotone sur $I$.

I.4. Stabilité de $\mathcal{A}(I)$.

(a) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions absolument monotones sur un même intervalle $I$ sont encore des fonctions absolument monotones sur $I$.

(b) Montrer que, si $a \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{A}(I)$, alors $a \cdot f$ est absolument monotone sur $I$.
En déduire que $\mathcal{A}(I)$ est un ensemble convexe.

(c) Montrer que, si $f$ est absolument monotone sur $I = ]a, b[$, alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $f_\tau : t \mapsto f(t - \tau)$ est absolument monotone sur $]a + \tau, b + \tau[$.

(d) Soient $\varphi : J \to \mathbb{R}$ absolument monotone sur $J$ et $f : I \to \mathbb{R}$ absolument monotone sur $I$ tel que $\varphi(J) \subset I$.
En exploitant une récurrence bien énoncée, montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in J$, $(f \circ \varphi)^{(n)}(t) \geqslant 0$.
En déduire que $f \circ \varphi$ est absolument monotone sur $J$.

I.5. Quelles sont parmi les fonctions suivantes celles qui sont absolument monotones sur l'intervalle donné ? (On justifiera évidemment les réponses) : $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ sur $I = \mathbb{R}$ ; $I_+ : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et $I_- : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$.

I.6. Condition nécessaire (et suffisante ?).

(a) Énoncer puis démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients d'une fonction polynomiale réelle pour qu'elle soit absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Supposons que $0 \in I$. Montrer que si $f$ est absolument monotone sur $I$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) \geqslant 0$. La réciproque est-elle vraie ? (on justifiera la réponse).

I.7. Prolongement.
Soit $f$ une fonction absolument monotone sur un intervalle ouvert $I = ]a,b[\,, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Montrer soigneusement que $f$ se prolonge à $[a,b[$ en une fonction $\widetilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$.

(b) Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b[$.

(c) Sous quelles hypothèses supplémentaires nécessaires et suffisantes sur $f$ pourrait-on prolonger $f$ de façon à obtenir une fonction absolument monotone sur $]a,b[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ ?

## II . Théorème de Bernstein d'égalité au polynôme de Taylor sur un intervalle

Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,R[$ telle que sa restriction à $]0,R[$ est une fonction absolument monotone sur $]0,R[$ : $f_{]0,R[} \in \mathcal{A}(]0,R[)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,R[$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p \qquad \text{et} \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

II.1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,R[, \quad f(x) = S_n(x) + R_n(x)$
(on pourra effectuer une intégration par parties sur $R_n(x)$).

(b) Montrer, en effectuant un changement de variable à préciser en détail, que

$$\forall x \in ]0,R[\ , \ R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(sx)\mathrm{d}s.$$

II.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

(a) En utilisant II.1(a), montrer que $\forall t \in [0,R[$, $R_n(t) \leqslant f(t)$.

(b) En étudiant la monotonie de $f^{(n+1)}$, établir que la fonction $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ définie sur $]0,R[$ est croissante.

(c) Soient $0 < x < y < R$. Montrer que

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

II.3. Montrer que, pour tout $x \in [0,R[$, la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

II.4. Dans cette question, nous considérons $f = \tan_{|[0,\frac{\pi}{2}[}$.

(a) Rappeler l'expression de $f'$ en fonction de $f$ puis montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} f^{(n-p)}$.

(b) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_0, \ldots, a_n$. Calculer $a_k$ pour $k$ de 1 à 7.

(d) Montrer que : $\quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = 0$.

(e) Montrer que : $\quad \forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad \tan x = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$.

## III . Etude de $\mathcal{A}(]-\infty,b[)$. Points extrémaux de Lax

On dit qu'un élément $f$ d'un ensemble $K$ convexe est un **point extrémal du convexe** $K$ si $K\setminus\{f\}$ reste convexe.

III.1. Soit $K$ un ensemble convexe et $f\in K$. Montrer que

$$f \text{ est un point extrémal de } K \iff \forall\lambda\in]0,1[\quad,\quad \forall f_1,f_2\in K\quad,\quad [\ f=(1-\lambda)f_1+\lambda f_2 \Longrightarrow f=f_1=f_2\ ]$$

Soit $b\in\mathbb{R}$. Pour tout $h>0$, on considère $K_h=\{f\in\mathcal{A}(]-\infty,b[)\mid \lim\limits_{t\to b^-} f(t)=h\}$.

III.2. Montrer que $K_h$ est convexe.

III.3. Montrer que si $f\in K_h$, alors pour tout $x<b$ :

$$f'(x)\leqslant\frac{h}{b-x}$$

III.4. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}_+$, posons $f_\alpha\left|\begin{array}{ccc} ]-\infty,b[ & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & he^{\alpha(t-b)}\end{array}\right.$. Montrer que, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $f_\alpha$ appartient à $K_h$.

III.5. Nous allons montrer que les fonctions $f_\alpha$ sont les seuls éléments extrémaux de $K_h$ possibles.

(a) Montrer que s'il existe $t\in]-\infty,b[$ tel que $f(t)=h$, alors $f$ est constante sur $]-\infty,b[$ égale à $h$.
En déduire que $f_0$ est un élément extrémal de $K_h$.

(b) Soit $c$ un élément extrémal de $K_h$, non constant égal à $h$. D'après III.5(a), pour tout $t<b$, $c(t)<h$.
On fixe arbitrairement $\tau\in]-\infty,b[$ tel que $0<c(\tau)<h$ (possible car $c$ est continue).
Et on note $\lambda=\dfrac{c(\tau)}{h}\in]0,1[$. Soient $f:t\mapsto\dfrac{c(t)-c(t-b+\tau)}{1-\lambda}$ et $g:t\mapsto\dfrac{c(t-b+\tau)}{\lambda}$.

i. Montrer que $f$ et $g$ appartiennent à $K_h$.

ii. Exprimer $c$ à l'aide de $f$ et $g$ puis en déduire que : $\forall\ t<b$ et $\forall\ \tau<b$ tel que $c(\tau)\neq 0$, $c(t)c(\tau)=hc(t-b+\tau)$.

iii. En déduire que pour tout $t<b$, $c(t)>0$.

iv. On note $\psi\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R}\\ u & \mapsto & \ln\dfrac{c(u+b)}{h}\end{array}\right.$, ce qui a du sens d'après la question précédente.
Montrer que pour tout $u,v\in\mathbb{R}_-^*$, $\psi(u)+\psi(v)=\psi(u+v)$.

v. En déduire qu'il existe $\alpha\geqslant 0$ tel que $c=f_\alpha$.

(c) Conclure.

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ sur $I$ si, pour tout $x\in I$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

III.6. Nous allons montrer que, si une suite de fonctions de $K_h$ converge simplement sur $]-\infty,b[$, alors la fonction limite est continue sur $]-\infty,b[$.
Considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $K_h$ qui converge simplement vers $f:]-\infty,b[\to\mathbb{R}$ sur $]-\infty,b[$.

(a) Montrer que $f$ est croissante sur $]-\infty,b[$.

(b) Montrer que $f$ admet une limite à gauche en $b$ inférieure ou égale à $h$.

(c) (*) Montrer que $f$ est continue sur $]-\infty,b[$. *On pourra exploiter la majoration exploitée en III.3.*

# DEVOIR SURVEILLE 6 - Correction

## Problème - Théorème de Bernstein pour les fonctions absolument monotones

## I . Manipulations de fonctions absolument monotones

Dans cette partie, $I$ est un intervalle de la forme $]a, b[$.

I.1. Montrer que $x \mapsto e^x$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}$.

---

La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même.
Donc, par récurrence immédiate, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \exp \in \mathcal{A}(\mathbb{R}).}$$

---

I.2. Soit $f$ une fonction absolument monotone sur $I$. Que peut-on dire du signe de $f$ ? de ses variations ? de sa convexité ?

---

Soit $f \in \mathcal{A}(I)$.

- Par hypothèse, $\forall x \in ]a, b[$, $f(x) \geqslant 0$ donc $f$ est positive ou nulle sur $I$.
- Par hypothèse, $\forall x \in ]a, b[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc $f$ est croissante sur $I$.
- Pour tout $x \in ]a, b[$, $f''(x) \geqslant 0$ donc $f$ est convexe sur $I$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } f \in \mathcal{A}(I) \text{, alors } f \text{ est positive ou nulle sur } I \text{, croissante et convexe sur } I.}$$

---

I.3. Justifier qu'une fonction $f$ est absolument monotone sur $I$ ssi elle est positive et dérivable sur $I$ et sa fonction dérivée est absolument monotone sur $I$.

---

- Supposons que $f$ est absolument monotone sur $I$.
  D'après la question précédente, $f$ est positive sur $I$.
  Puis comme $f$ est absolument monotone sur $I$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$, donc dérivable.
  et ainsi $f'$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in I, \qquad (f')^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) \geqslant 0$$

  Donc $f' \in \mathcal{A}(I)$.

- Réciproquement, supposons que $f$ est positive, dérivable sur $I$ et de dérivée absolument monotone sur $I$.
  $f'$ est absolument monotone donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ donc $f$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ (comme primitive d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$).
  Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  ⋆ Si $n = 0$, $f$ est positive, donc pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = f(x) \geqslant 0$.
  ⋆ Si $n \geqslant 1$, pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) \geqslant 0$, puisque $f' \in \mathcal{A}(I)$.

  Ainsi, $f \in \mathcal{A}(I)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est absolument monotone sur } I \text{ si et seulement si} \\ \qquad\text{elle est positive et dérivable sur } I \text{ et sa fonction dérivée est absolument monotone sur } I. \end{array}}$$

---

I.4. Stabilité de $\mathcal{A}(I)$.

(a) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions absolument monotones sur un même intervalle $I$ sont encore des fonctions absolument monotones sur $I$.

---

Soient $(f, g) \in \mathcal{A}(I)^2$ fixées quelconques.
Cas $f + g$ :
$(i)$ $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I = ]a, b[$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$,
$(ii)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de la dérivation,

$$\forall x \in ]a, b[\ ,\ (f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geqslant 0$$

car $(f, g) \in \mathcal{A}(I)^2$.

Cas $f \times g$ :
$(i)$ $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$,
$(ii)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule de Leibniz,

$$\forall x \in ]a, b[\ ,\ (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{f^{(k)}(x)}_{\substack{\geqslant 0 \\ \text{car } f \in \mathcal{A}(]a,b[)}} \times \underbrace{g^{(n-k)}(x)}_{\substack{\geqslant 0 \\ \text{car } g \in \mathcal{A}(]a,b[)}} \geqslant 0$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Si } f, g \in \mathcal{A}(I), \text{ alors } f + g \text{ et } f \times g \in \mathcal{A}(I).}$$

---

(b) Montrer que, si $a \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{A}(I)$, alors $a \cdot f$ est absolument monotone sur $I$.
En déduire que $\mathcal{A}(I)$ est un ensemble convexe.

---

Toujours par linéarité de la dérivation, $a \cdot f$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(a \cdot f)^{(n)} = a \cdot f^{(n)}$.
Puisque $a \geqslant 0$, alors $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in I$, $(a \cdot f)^{(n)}(x) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Donc } a \cdot f \in \mathcal{A}(I).}$$

Soient $f, g \in \mathcal{A}(I)$ et $\lambda \in [0, 1]$, donc $1 - \lambda \in [0, 1]$.
Par conséquent $\lambda \cdot f \in \mathcal{A}(I)$ et $(1 - \lambda) \cdot g \in \mathcal{A}(I)$ d'après la première partie de cette question.
Puis par addition (question **??**) : $\lambda \cdot f + (1 - \lambda) \cdot g \in \mathcal{A}(I)$.

$$\boxed{\mathcal{A}(I) \text{ est une partie convexe de } \mathcal{F}(I, \mathbb{R}).}$$

---

(c) Montrer que si $f$ est absolument monotone sur $I = ]a, b[$, alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $f_\tau : t \mapsto f(t - \tau)$ est absolument monotone sur $]a + \tau, b + \tau[$.

---

$\varphi : ]a + \tau, b + \tau[ \to ]a, b[$, $t \mapsto t - \tau$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car c'est une fonction polynomiale.
Ainsi, par composition, $f_\tau = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a + \tau, b + \tau[$.
En outre, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_\tau^{(k)} = f^{(k)} \circ \varphi$,
En effet, c'est le cas pour $k = 0$ (et également $k = 1$, puisque $\varphi' = 1$) - *Initialisation*.
Et par ailleurs, si pour $k \in \mathbb{N}$, $f_\tau^{(k)} = f^{(k)} \circ \varphi$, alors $f_\tau^{(k+1)} = \varphi' \times f^{(k+1)} \circ \varphi = f^{(k+1)} \circ \varphi$ - *Hérédité*.
Et donc, comme $f \in \mathcal{A}(]a, b[)$, $f^{(k)} \geqslant 0$ et donc $f^{(k)} \circ \varphi \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \tau \in \mathbb{R},\ f_\tau : t \mapsto f(t - \tau) \text{ est absolument monotone sur } ]a + \tau, b + \tau[.}$$

---

(d) Soient $\varphi : J \to \mathbb{R}$ absolument monotone sur $J$ et $f : I \to \mathbb{R}$ absolument monotone sur $I$ tel que $\varphi(J) \subset I$.
En exploitant une récurrence bien énoncée, montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in J$, $(f \circ \varphi)^{(n)}(t) \geqslant 0$.
En déduire que $f \circ \varphi$ est absolument monotone sur $J$.

---

- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ : « $\forall \varphi \in \mathcal{A}(J)$, $\forall f \in \mathcal{A}(I)$ telle que $\varphi(J) \subset I$, $(f \circ \varphi)^{(n)} \geqslant 0$ sur $J$ ».
  Tout d'abord, notons que selon les hypothèses de $\mathcal{P}_n$, par composition, $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $J$.
  Nous faisons une récurrence forte.
  - ⋆ Soient $\varphi \in \mathcal{A}(J)$ et $f \in \mathcal{A}(I)$ avec $\varphi(J) \subset I$ fixées quelconques.
    $f \in \mathcal{A}(I)$ donc $f \geqslant 0$ sur $I$, or $\varphi(J) \subset I$ donc $f \circ \varphi \geqslant 0$ sur $I$.
    Par conséquent, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ sont vraies.
    Soient $\varphi \in \mathcal{A}(J)$, $f \in \mathcal{A}(I)$ avec $\varphi(J) \subset I$ fixées quelconques.
    Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur $J$ et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times f'(\varphi)$.
    Et donc, d'après la formule de Leibniz :

$$(f \circ \varphi)^{(n+1)} = (\varphi' \times f' \circ \varphi)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\varphi')^{(k)} \times (f'(\varphi))^{(n-k)}$$

⋆⋆ $f \in \mathcal{A}(I)$, donc $f' \in \mathcal{A}(I)$ d'après la question **??** donc les propositions $\mathcal{P}_0 \ldots \mathcal{P}_n$ s'appliquent pour $\varphi \leftarrow \varphi$ et $f \leftarrow f'$ ce qui permet d'affirmer

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\ ,\ (f' \circ \varphi)^{(k)} \geqslant 0 \text{ sur } J.$$

$\star\star$ De même, $\varphi \in \mathcal{A}(J)$, donc $\varphi' \in \mathcal{A}(J)$ d'après question **??** donc

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\ ,\ (\varphi')^{(k)} \geqslant 0 \text{ sur } J.$$

On en déduit que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k}(\varphi')^{(k)} \times \left(f'(\varphi)\right)^{(n-k)} \geqslant 0$ sur $J$ si bien que, par addition (question **??**), $(f \circ \varphi)^{(n+1)} \geqslant 0$ sur $J$, donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour toutes } \varphi \in \mathcal{A}(J) \text{ et } f \in \mathcal{A}(I) \text{ avec } \varphi(J) \subset I, \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N},\ (f \circ \varphi)^{(n)} \geqslant 0 \text{ sur } J.}$$

- Soient $\varphi : J \to \mathbb{R}$ absolument monotone sur $J$ et $f : I \to \mathbb{R}$ absolument monotone sur $I$ tel que $\varphi(J) \subset I$.
  — D'une part, $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $J$ par stabilité du caractère $\mathcal{C}^\infty$ par composition.
  — D'autre part d'après le point précédent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f \circ \varphi)^{(n)} \geqslant 0$ sur $J$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \circ \varphi \text{ est absolument monotone sur } J.}$$

---

I.5. Quelles sont parmi les fonctions suivantes celles qui sont absolument monotones sur l'intervalle donné ? (On justifiera évidemment les réponses) : $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ sur $I = \mathbb{R}$ ; $I_+ : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et $I_- : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$.

---

- La fonction cosinus hyperbolique vérifie : $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.
  Or $\mathrm{sh}(-1) = \dfrac{e^{-1} - e^1}{2} < 0$ donc $\mathrm{ch} \notin \mathcal{A}(\mathbb{R})$.
- Notons $I_+ : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.
  Il est bien connu que cette fonction est décroissante (on peut également calculer la dérivée $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2} < 0$).
  Ainsi $I_+ \notin \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*)$.
- Considérons la fonction $I_- : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$.

Notons pour commencer que pour $x \in I$, $x < 0$, donc $|x| = -x$, donc $x = -|x|$,. Puis :
$(i)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$,
$(ii)$ vérifie (récurrence immédiate) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $I_-^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}k!}{x^{k+1}} = \dfrac{(-1)^{k+1}k!}{(-1)^{k+1}|x|^{k+1}} = \dfrac{k!}{|x|^{k+1}} > 0$
donc $I_- \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_-^*)$.

$$\boxed{\text{Bilan : } \mathrm{ch} \notin \mathcal{A}(\mathbb{R}),\ I_+ \notin \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*),\ I_- \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_-^*).}$$

---

I.6. Condition nécessaire (et suffisante).

(a) Énoncer puis démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients d'une fonction polynomiale réelle pour qu'elle soit absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

- Soit $P$ une fonction polynomiale fixée quelconque absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Il existe $p \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.

  Pour tout $x > 0$, $P(x) \geqslant 0$. Or $P$ admet une limite en 0 égale à $a_0$.

  Et donc par conservation de l'inégalité large en passant à la limite $x \to 0$ (théorème de passage à la limite dans une inégalité) : $a_0 \geqslant 0$.

  Pour tout $h \in [\![1, p]\!]$, $P^{(h)} : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=h}^{p} \frac{h!}{(i-h)!} a_i x^{i-h}$, donc pour les mêmes raisons que précédemment

$$h! a_h = \lim_{x \to 0} P^{(h)}(x) \geqslant 0 \quad \text{ donc } \quad a_h \geqslant 0$$

  Ainsi, tous les coefficients de $P$ sont positifs ou nuls.

- Réciproquement soit $P : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $a_k \geqslant 0$.

  Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $M_k : x \mapsto x^k$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ :

  $\star$ $M_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,
  $\star$ $\forall\ h \in [\![0, k]\!]$, $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, $M_k^{(h)}(x) = \dfrac{k!}{(k-h)!} x^{k-h} \geqslant 0$,

⋆ pour $h > k$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $M_k^{(h)}(0) = 0 \geqslant 0$.

Puis, d'après la question **??**, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k M_k \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*)$ par positivité de $a_k$.
Enfin, par récurrence sur le nombre de termes, on a : une somme de $p+1$ éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*)$ est un élément de $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*)$.
Donc $P \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, une fonction polynomiale est absolument monotone sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls.}\end{array}}$$

---

(b) Supposons que $0 \in I$. Montrer que si $f$ est absolument monotone sur $I$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) \geqslant 0$.
La réciproque est-elle vraie (on justifiera la réponse).

---

Comme $0 \in I$, il est nécessaire que -puisque $f \in \mathcal{A}(I)$- :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) \geqslant 0}$$

Reprenons le contre-exemple du ch sur $I = \mathbb{R}$, non absolument monotone,
alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ch}^{(k)}(0) = \begin{cases} \mathrm{ch}(0) = 1 & \text{si } k \equiv 0[2] \\ \mathrm{sh}(0) = 0 & \text{si } k \equiv 1[2] \end{cases} \geqslant 0$

$$\boxed{\text{Donc la réciproque est fausse.}}$$

---

I.7. Prolongement.
Soit $f$ une fonction absolument monotone sur un intervalle ouvert $I = ]a, b[\,, (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Montrer soigneusement que $f$ se prolonge à $[a, b[$ en une fonction $\widetilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$.

---

- **Construction du prolongement.**
La fonction $f$ est croissante sur $]a, b[$ (car absolument monotone voir question **??**)
et minorée par 0 (car absolument monotone voir question **??**). Donc $f$ admet une limite finie à droite en $a$.
Par conséquent la fonction $f$ se prolonge par continuité en $\widetilde{f}$ : $\widetilde{f} \left| \begin{array}{ccc} [a, b[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in ]a, b[, \\ \lim\limits_{t \to a^+} f(t) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$ .
- **Régularité $\mathcal{C}^0$ du prolongement.**
$\widetilde{f}$ est continue en $a$ par construction et continue sur $]a, b[$ car elle prolonge $f$ qui est continue sur $]a, b[$ (car $f \in \mathcal{A}(]a, b[)$) donc $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{R})$.
- **Régularité $\mathcal{C}^1$ du prolongement.**
  - ⋆ $\widetilde{f}$ est continue sur $[a, b[$ donc en $a$.
  - ⋆ $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ car elle coïncide sur cet intervalle ouvert avec la fonction $f$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$.
  - ⋆ $f$ est absolument monotone sur $]a, b[$ donc $f' \geqslant 0$ sur $]a, b[$ et $f'' \geqslant 0$ sur $]a, b[$, donc $\widetilde{f}'$ (qui coïncide avec $f'$ sur $]a, b[$) est croissante et minorée (car positive) sur $]a, b[$ donc $\widetilde{f}'$ admet une limite finie en $a$,

  donc le théorème de prolongement du caractère $\mathcal{C}^1$ permet d'affirmer que $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^1([a, b[, \mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \widetilde{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, b[.}$$

---

(b) Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b[$.

---

Considérons la propriété de récurrence $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(n) \ : \ « \ \widetilde{f} \in \mathcal{C}^n([a, b[, \mathbb{R}) \ » \ .$$

— $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question précédente.
— Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
On a donc que $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^n([a, b[, \mathbb{R})$.
  - ⋆ $\widetilde{f}^{(n)}$ est continue sur $[a, b[$ (car $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^n([a, b[, \mathbb{R}))$ donc en $a$,
  - ⋆ $\widetilde{f}^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ (car elle coïncide avec $f^{(n)}$ et $f$ est absolument monotone sur $]a, b[$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$),
  - ⋆ $f$ est absolument monotone sur $]a, b[$ donc $f^{(n+2)} \geqslant 0$ sur $]a, b[$ et $f^{(n+1)} \geqslant 0$ sur $]a, b[$, donc $\widetilde{f}^{(n+1)}$ (qui coïncide avec $f^{(n+1)}$ sur $]a, b[$) est croissante et positive sur $]a, b[$ donc $\widetilde{f}^{(n+1)}$ admet une limite finie en $a$,

si bien que le théorème de prolongement du caractère $\mathcal{C}^1$ permet d'affirmer que $\widetilde{f}^{(n)} \in \mathcal{C}^1([a,b[,\mathbb{R})$ et donc que $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b[,\mathbb{R})$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \widetilde{f} \in \mathcal{C}^n([a,b[,\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \widetilde{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [a,b[.}$$

---

(c) Sous quelles hypothèses supplémentaires nécessaires et suffisantes sur $f$ pourrait-on prolonger $f$ de façon à obtenir une fonction absolument monotone sur $]a,b[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ ?

---

- Le prolongement d'une fonction absolument monotone sur $]a,b[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b[$ a été automatique (voir question précédente), la propriété clé étant que les dérivées successives sont croissantes et minorées (car positives) donc elles ont des limites finies à droite en $a$.

$$\boxed{\text{si et seulement si } f \text{ est majorée sur } ]a,b[.}$$

- En revanche, pour pouvoir développer à gauche en $b$ les mêmes arguments que ceux utilisés en $a$ et espérer prolonger $f$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$, puisque les dérivées successives sont toutes croissantes, une condition nécessaire et suffisante est que $f$ ainsi que toutes ses dérivées successives soient majorées sur $]a,b[$ :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \exists M_n \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in ]a,b[\ ,\ f^{(n)}(x) \leqslant M_n\ .}$$

**Attention**, l'hypothèse ci-dessus est différente de

$$\exists M \in \mathbb{R}_+\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in ]a,b[\ ,\ f^{(n)}(x) \leqslant M$$

qui se lit « toutes les dérivées successives de $f$ sont majorées par une même constante sur $]a,b[$ ». Cette hypothèse est plus forte que la précédente (car elle implique la précédente), elle est donc suffisante mais peut-être pas nécessaire...

---

# II . Théorème de Bernstein d'égalité au polynôme de Taylor sur un intervalle

Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{A}([0,R[)$, une fonction absolument monotone sur $[0,R[$.
$f$ peut alors se prolonger en fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,R[$ d'après I.7. Notons encore (abusivement) $f$ la fonction prolongée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,R[$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p \qquad \text{et} \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

II.1. (a) Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,R[, \quad f(x) = S_n(x) + R_n(x)$
(on pourra effectuer une intégration par parties sur $R_n(x)$).

---

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \text{« } \forall x \in [0,R[\ ,\ f(x) = S_n(x) + R_n(x). \text{ »}$$

⋆ Observons que,

$$\forall x \in [0,R[\ ,\ S_0(x) + R_0(x) = \sum_{p=0}^{0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\mathrm{d}t = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(0) + f(x) - f(0)$$

donc

$$\forall x \in [0,R[\ ,\ f(x) = S_0(x) + R_0(x)$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

La véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,R[\ ,\ f(x) &= S_n(x)+R_n(x)\\
&= \sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\\
&= \sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p+\left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)(n)!}f^{(n+1)}(t)\right]_0^x-\int_0^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}(f^{(n+1)})'(t)\mathrm{d}t\\
&= \sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p+0+\frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)+\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\\
&= S_{n+1}(x)+R_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in[0,R[,\quad f(x)=S_n(x)+R_n(x).}$$

On peut aussi dériver $H : t\mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(p)}(t)}{p!}(x-t)^p$. On obtient $t\mapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$.
Et donc, si on intègre ce second membre entre 0 et $x$, on trouve $H(x)-H(0)=f(x)-S_n(x)$.

---

(b) Montrer, en effectuant un changement de variable à préciser en détail, que

$$\forall x \in ]0,R[\ ,\ R_n(x)=x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(sx)\mathrm{d}s.$$

---

Soit $x\in]0,R[$ fixé quelconque.

Effectuons le changement de variable linéaire $t=xs$ ce qui est autorisé car $\left|\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & [0,x]\\ s & \mapsto & xs\end{array}\right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $x\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$ :

$$R_n(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{(x-xs)^n}{n!}f^{(n+1)}(xs)x\mathrm{d}s=x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(sx)\mathrm{d}s$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in ]0,R[\ ,\ R_n(x)=x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(sx)\mathrm{d}s.}$$

---

II.2. Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé.

(a) En utilisant II.1(a), montrer que $\forall t\in[0,R[$, $R_n(t)\leqslant f(t)$.

---

$f$ étant absolument monotone, ses dérivées successives en 0 sont toutes $\geqslant 0$ donc

$$\forall t\in[0,R[\ ,\ S_n(t)=\sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}t^p\geqslant 0$$

or, d'après la question II.1(a), $S_n(t)=f(t)-R_n(t)$ donc

$$\boxed{\forall t\in[0,R[\ ,\ R_n(t)\leqslant f(t).}$$

---

(b) En étudiant la monotonie de $f^{(n+1)}$, établir que la fonction $x\mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ définie sur $]0,R[$ est croissante.

---

$f$ est absolument monotone sur $[0,R[$ donc $f^{(n+2)}\geqslant 0$ sur $[0,R[$ donc

$$\boxed{f^{(n+1)} \text{ est croissante sur } [0,R[.}$$

Soient $(x,y)\in]0,R[^2$ fixés quelconques tels que $x<y$.

$$\begin{aligned}
\frac{R_n(y)}{y^{n+1}}-\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} &= \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(sy)\mathrm{d}s-\int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(sx)\mathrm{d}s \quad \text{d'après la question précédente,}\\
&= \int_0^1 \underbrace{\frac{(1-s)^n}{n!}}_{\substack{\geqslant 0\\ \text{car } s\in[0,1]}} \underbrace{\left(f^{(n+1)}(sy)-f^{(n+1)}(sx)\right)}_{\substack{s\geqslant 0 \Rightarrow sx\leqslant sy\\ \text{donc } f^{(n+1)}(sy)-f^{(n+1)}(sx)\geqslant 0\\ \text{par croissance de } f^{(n+1)}}}\mathrm{d}s \quad \text{par linéarité de l'intégrale,}\\
&\geqslant 0 \quad \text{par positivité de l'intégrale.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } x \in ]0, R[ \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \in \mathbb{R} \text{ est croissante.}}$$

---

(c) Soient $0 < x < y < R$. Montrer que

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

---

⋆ D'une part, par positivité de l'intégrale,

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \underbrace{\frac{(1-s)^n}{n!}}_{\geqslant 0} \underbrace{f^{(n+1)}(sx)}_{\substack{\geqslant 0 \\ \text{car } f \in \mathcal{A}([0,R[)}} \, \mathrm{d}s \geqslant 0$$

⋆ D'autre part, par croissance de $t \in ]0, R[ \mapsto \dfrac{R_n(t)}{t^{n+1}} \in \mathbb{R}$,

$$0 < x < y < R \Rightarrow \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

donc

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

si bien qu'en multipliant par $x^{n+1}$ ce qui préserve le sens de l'inégalité car $x^{n+1} \geqslant 0$ et permet de simplifier car $x^{n+1} \neq 0$,

$$R_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} R_n(y) \underbrace{\leqslant}_{\substack{R_n(y) \leqslant f(y) \\ \text{d'après la question ??}}} \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} f(y)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).}$$

---

II.3. Montrer que, pour tout $x \in [0, R[$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

---

— Si $x = 0$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à $f(0)$ donc elle converge vers $f(0)$.

— Soit $x \in ]0, R[$ fixé quelconque.

Appliquons l'encadrement établit dans la question **??** pour $y \leftarrow \dfrac{x+R}{2}$ ce qui est autorisé car $0 < x < \dfrac{x+R}{2} < R$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant f(x) - S_n(x) = R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{\frac{x+R}{2}}\right)^{n+1} f\left(\frac{x+R}{2}\right).$$

Puisque $x \in ]0, \dfrac{x+R}{2}[$, $\dfrac{x}{\frac{x+R}{2}} \in ]-1, 1[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{\frac{x+R}{2}}\right)^{n+1} = 0$.

Les deux membres extrêmes de l'encadrement ci-dessus convergent vers 0

donc le théorème d'existence de limite par encadrement permet d'affirmer que la suite $(f(x) - S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge

et que sa limite est nulle, donc la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (f(x) - (f(x) - S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in [0, R[, \text{ la suite } (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } f(x).}$$

---

II.4. Dans cette question, nous considérons $f = \tan|_{[0, \frac{\pi}{2}[}$.

(a) Rappeler l'expression de $f'$ en fonction de $f$ puis montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} f^{(n-p)}$.

---

$f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$\boxed{\text{On a } f' = 1 + f^2.}$$

On applique ensuite la linéarité de la dérivation puis la formule de Leibniz pour dériver le produit $f^2$.
Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{f^{n+1} = (f')^{(n)} = 1^{(n)} + (f^2)^{(n)} = 0 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n)}}$$

---

(b) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$

---

Considérons la propriété $\mathcal{Q}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{Q}(n) \ : \ « \ \forall k \in [\![0, n]\!] \ , \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \ \ f^{(k)}(x) \geqslant 0. \ »$$

- ⋆ $f = \tan \geqslant 0$ et $f' = 1 + f^2 \geqslant 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.
  La véracité de $\mathcal{Q}(n)$ donne

  $$\forall k \in [\![0, n]\!] \ , \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \ \ f^{(k}(x) \geqslant 0$$

  De plus, la formule établie dans la question précédente donne

  $$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \ , \ f^{(n+1)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{p}}_{\in \mathbb{N}} \qquad \underbrace{f^{(p)}(x)}_{\substack{\geqslant 0 \\ \text{car } \mathcal{Q}(n) \text{ vraie}}} \qquad \underbrace{f^{(n-p)}(x)}_{\substack{\geqslant 0 \\ \text{car } \mathcal{Q}(n) \text{ vraie}}} \qquad \geqslant 0$$

  Par conséquent, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.}$$

On aurait aussi pu faire une récurrence forte (sans le $\forall \ k \in [\![0, n]\!]$ dans la définition de la propriété $\mathcal{Q}(\cdot)$.

---

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_0$, ..., $a_n$. Calculer $a_k$ pour $k$ de 1 à 7.

---

- ⋆ Pour $n = 0$, $a_0 = \tan 0 = 0$.
- ⋆ Pour $n = 1$, $a_1 = \dfrac{f'(0)}{1!} = 1 + \tan^2 0 = 1$.
- ⋆ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en évaluant en 0 la relation de récurrence établie précédemment (qui ne s'applique que pour $n \geqslant 1$),

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n+1)}(0) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)}(0) f^{(n-p)}(0)$$

  donc

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)! a_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} p! a_p (n-p)! a_{n-p} = n! \sum_{p=0}^{n} a_p a_{n-p}$$

  si bien que

  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} a_p a_{n-p}.}$$

  Cette formule permet de calculer $a_i$ pour $i \geqslant 2$. En effet,
  - ⋆⋆ pour $i = 2$, $a_2 = \dfrac{1}{2} \sum p = 0^1 a_p a_{1-p} = \dfrac{1}{2}(a_0 a_1 + a_1 a_0) = 0$.
  - ⋆⋆ pour $i = 3$, $a_3 = \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{p=0}^{2} a_p a_{2-p} = \dfrac{1}{3}(a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0) = \dfrac{1}{3}$.
  - ⋆⋆ pour $i = 4$, $a_4 = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{p=0}^{3} a_p a_{2-p} = \dfrac{1}{4}(2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) = 0$
  - ⋆⋆ pour $i = 5$, $a_5 = \dfrac{1}{5} \displaystyle\sum_{p=0}^{4} a_p a_{4-p} = \dfrac{1}{5}(a_0 a_4 + a_1 a_3 + a_2^2 + a_3 a_1 + a_4 a_0) = \dfrac{2}{15}$.
  - ⋆⋆ pour $i = 6$, $a_6 = \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{p=0}^{5} a_p a_{2-p} = \dfrac{1}{6}(2a_0 a_5 + 2a_2 a_3 + 2a_4 a_1) = 0$

$\star\star$ pour $i = 7$,

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{7}\sum_{p=0}^{6} a_p a_{6-p} = \frac{1}{7}(a_0a_6 + a_1a_5 + a_2a_4 + a_3^2 + a_4a_2 + a_5a_1 + a_6a_0) \\ &= \frac{1}{7}(2a_1a_5 + a_3^2) = \frac{1}{7}\left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9}\right) = \frac{4\times 3 + 5}{7 \times 15 \times 3} = \frac{17}{315} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{2}{15}, \quad a_7 = \frac{17}{315}}$$

---

(d) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = 0.$

---

- **Méthode 1.** Utiliser l'imparité de tangente qui impose celle de toutes ses dérivées d'ordre pair et donc la nullité de tous les coefficients $a_{2p}$ pour $p \in \mathbb{N}$.
- **Méthode 2.** Procéder par récurrence forte à partir de la formule établie dans la question précédente en considérant la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{P}(p) \ : \ « \ \forall k \in [\![0, p]\!] \ , \ a_{2k} = 0 \ ».$$

  - $\star$ $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $a_0 = \tan(0) = 0$.
  - $\star$ Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(p)$ est vraie.
  
  La véracité de $\mathcal{P}(p)$ garantit que
$$\forall k \in [\![0, p]\!] \ , \ a_{2k} = 0$$
$$\begin{aligned} a_{2(p+1)} &= \tan^{(2p+2)}(0) \\ &= \frac{1}{2p+2}\sum_{k=0}^{2p+1} a_k a_{2p+1-k} \end{aligned}$$
  Or pour tout $k \in [\![0, 2p+1]\!]$, $k$ et $2p+1-k$ sont deux entiers de $[\![0, 2p+1]\!]$ et ont des parités opposées donc l'un des indices est pair donc l'un des deux entiers $a_k$ ou $a_{2p+1-k}$ est nul (puisque $\mathcal{P}(p)$ est vraie) donc $a_k a_{2p+1-k} = 0$ si bien que $a_{2(p+1)} = 0$.
  
  Par conséquent, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = 0.}$$

---

(e) Montrer que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan x = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}.$

---

Nous venons de prouver que $f = \tan_{|[0,\frac{\pi}{2}[} \in \mathcal{C}^\infty\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan_{[0,\frac{\pi}{2}[} \in \mathcal{A}\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ ce qui permet de lui appliquer la conclusion de la question II.3 :

pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite notée $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ vérifie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \tan x$$

Par ailleurs, la convergence de cette suite implique celle de la sous-suite des termes d'indices impairs qui, par nullité des dérivées d'ordre pair en zéro, est

$$\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}x^{2p+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

si bien que

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ : \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} = \tan x.}$$

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Observons que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}x^{2p+1} = -\sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}|x|^{2p+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\tan|x|$ d'après la première partie de la question car $|x| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ : \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \tan x.}$$

---

# III . Etude de $\mathcal{A}(]-\infty, b[)$. Points extrémaux de Lax

On dit qu'un élément $f$ d'un ensemble $K$ convexe est un **point extrémal du convexe** $K$ si $K \setminus \{f\}$ reste convexe.

III.1. Soit $K$ un ensemble convexe et $f \in K$. Montrer que

$$f \text{ est un point extrémal du convexe } K \iff \forall \lambda \in ]0,1[ \quad , \quad \forall f_1, f_2 \in K \quad , \quad [\ f = (1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 \Longrightarrow f = f_1 = f_2\ ]$$

On fixe $h > 0$. On considère $K_h = \{f \in \mathcal{A}(]-\infty, b[) \mid \lim_{t \to b^-} f(t) = h\}$.

---

- Supposons que $f$ est un point extrémal de $K$.
  Soient $\lambda \in ]0,1[$ et $f_1, f_2 \in K$ tels que $f = (1-\lambda) f_1 + \lambda f_2$.
  Or $K \setminus \{f\}$ est toujours convexe, donc $\forall\ \mu \in [0,1]$, $\forall\ h_1, h_2 \in K \setminus \{f\}$, $(1-\mu) h_1 + \mu h_2 \in K \setminus \{f\}$,
  - ⋆ si $f_1 \neq f$ et $f_2 \neq f$, en appliquant ce qui précède pour $(h_1, h_2, \mu) \leftarrow (f_1, f_2, \lambda)$, on obtient une contradiction,
  - ⋆ par conséquent, $f_1$ ou $f_2$ est égale à $f$, quitte à échanger leurs rôles, traitons le cas $f_1 = f$ : on obtient alors $f = (1-\lambda) f + \lambda f_2$ donc $\lambda f = \lambda f_2$, or $\lambda \neq 0$ donc $f = f_2$.
- Supposons que $\forall \lambda \in ]0,1[ \quad , \quad \forall f_1, f_2 \in K \quad , \quad [\ f = (1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 \Longrightarrow f = f_1 = f_2\ ]$.
  Montrons que $K \setminus \{f\}$ est convexe.
  Soient $(f_1, f_2) \in (K \setminus \{f\})^2$ et $\lambda \in [0,1]$ fixés.
  - ⋆ Si $\lambda = 0$ (resp. $\lambda = 1$), $(1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 = f_1 \in K \setminus \{f\}$ (resp. $(1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 = f_2 \in K \setminus \{f\}$).
  - ⋆ Sinon, $\lambda \in ]0,1[$. Si $(1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 = f$, alors l'hypothèse faite sur $f$ s'applique et permet de conclure que $f_1 = f$ ce qui contredit l'appartenance de $f_1$ à $K \setminus \{f\}$. Par conséquent, $(1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 \neq f$ donc $(1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 \in K \setminus \{f\}$.

  Ainsi, $K \setminus \{f\}$ est convexe ce qui prouve que $f$ est un point extrémal de $K$.

$$\boxed{f \text{ un point extrémal de } K \iff \Big(\forall \lambda \in ]0,1[\ ,\ \forall f_1, f_2 \in K\ ,\ [f = (1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 \Longrightarrow f = f_1 = f_2]\Big).}$$

---

Soit $b \in \mathbb{R}$. Pour tout $h > 0$, on considère $K_h = \{f \in \mathcal{A}(]-\infty, b[) \mid \lim_{t \to b^-} f(t) = h\}$.

III.2. Montrer que $K_h$ est convexe.

---

Soient $f_1, f_2 \in K_h$ et $\lambda \in [0,1]$.

- ⋆ Nous avons que que $\mathcal{A}(I)$ est convexe en I.4.(b) pour tout $I$.
  Donc $(1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 \in \mathcal{A}(]-\infty, b[)$.
- ⋆ Puis par addition de fonctions admettant une limite en $b$, $(1-\lambda) f_1 + \lambda f_2$ admet une limite en $b$,
  et $\lim_{t \to b^-} (1-\lambda) f_1(t) + \lambda f_2(t) = (1-\lambda) h + \lambda h = h$.

Donc $(1-\lambda) f_1 + \lambda f_2 \in K_h$.

$$\boxed{K_h \text{ est convexe.}}$$

---

III.3. Montrer que si $f \in K_h$, alors pour tout $x < b$ :

$$f'(x) \leqslant \frac{h}{b-x}$$

---

Soit $f \in K_h$. Elle est convexe et dérivable sur son domaine de définition, donc la courbe est au-dessus de toutes ses tangentes, ce qui s'écrit analytiquement :

$$\forall\ x \in ]-\infty, b[\ ,\ \forall\ t \in ]-\infty, b[\ ,\ f(t) \geqslant f'(x)(t-x) + f(x)$$

Or pour tout $(x,t) \in ]-\infty, b[^2$, $f(x) \geqslant 0$ et $f(t) \leqslant h$, ce qui donne : $h \geqslant f'(x)(t-x)$.
Les deux membres de cette dernière inégalité ont une limite finie lorsque $t$ tend vers $b$ donc en passant à la limite sur l'inégalité lorsque $t$ vers $b$ (et en exploitant le fait que $b - x > 0$) :

$$\boxed{\forall\ x < b, \qquad f'(x) \leqslant \frac{h}{b-x}}$$

---

III.4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, posons $f_\alpha \left| \begin{array}{ccc} ]-\infty, b[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & he^{\alpha(t-b)} \end{array} \right.$. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $f_\alpha$ appartient à $K_h$.

---

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
Si $\alpha = 0$, alors $f_\alpha : x \mapsto h$ est une constante positive ou nulle. C'est bien un élément de $K_h$.
Si $\alpha \neq 0$.

- $f_\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, b[$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_\alpha^{(k)} : x \mapsto h\alpha^k e^{\alpha(x-b)}$ (récurrence) et donc $f_\alpha^{(k)} \geqslant 0$ sur $]-\infty, b[$.

Donc $f_\alpha \in \mathcal{A}(]-\infty, b[)$.

- En tant que fonction usuelle définie et continue sur $\mathbb{R}$, restreinte à $]-\infty, b[$, $f_\alpha$ admet une limite en $b$ égale à $he^{\alpha(b-b)} = he^0 = h$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+,\ f_\alpha : ]-\infty, b[ \to \mathbb{R},\ t \mapsto h\exp(\alpha \times (t-b)) \in K_h.}$$

---

III.5. Nous allons montrer que les fonctions $f_\alpha$ sont les seuls éléments extrémaux de $K_h$ possibles.

(a) Montrer que s'il existe $t \in ]-\infty, b[$ tel que $f(t) = h$, alors $f$ est constante sur $]-\infty, b[$ égale à $h$.
En déduire que $f_0$ est un élément extrémal de $K_h$.

---

Supposons qu'il existe $t \in ]-\infty, b[$ tel que $f(t) = h$.
Rappelons que, par croissance de $f$, pour tout $u > t$, on a $f(u) \geqslant h$.
S'il existe $u_0 \in ]t, b[$ tel que $f(u_0) > h$, alors par croissance de $f$ : $\forall\, x \geqslant u_0$, $f(x) \geqslant f(u_0) (> h)$.
Et donc en faisant tendre $x$ vers $b^-$ (puisque la limite existe), on aurait : $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) \geqslant f(u_0) > h$.
Ceci est impossible. Donc pour tout $u \in ]t, b[$, $f(u) \leqslant h$.
Et par double inégalité : $\forall\, u \in [t, b[$, $f(u) = h$.
Ainsi, $f$ est constante sur $[t, b[$, qui contient plus de deux points. Donc $f'_{|[t,b[} = 0$.
Or $f$ est absolument monotone sur $]-\infty, b[$, donc $f'$ est positive et croissante.
Par conséquent, pour tout $u \leqslant t$ : $0 \leqslant f'(u) \leqslant f'(t) = 0$.
Ainsi, $f$ est constante sur tout $]-\infty, b[$ (avec l'égalité des accroissements finis, si besoin).

$$\boxed{\text{Si il existe } t \in ]-\infty, b[ \text{ tel que } f(t) = h, \text{ alors } f \text{ est constante sur } ]-\infty, b[ \text{ égale à } h.}$$

Supposons que $f_0 = \lambda f + (1-\lambda) g$ avec $f, g \in K_h$ et $\lambda \in ]0, 1[$.
Pour tout $t < b$, $f(t) \leqslant h$, $g(t) \leqslant h$, donc puisque $\lambda, 1-\lambda \geqslant 0$ :

$$h = f_0(t) = \lambda f(t) + (1-\lambda) g(t) \leqslant \lambda h + (1-\lambda) h = h$$

On a donc égalités dans ces inégalités i.e. : pour tout $t < b$, $f(t) = h$ et $g(t) = h$ et donc $f = g = f_0$.

$$\boxed{f_0 \text{ est donc un élément extrémal de } K_h.}$$

---

(b) Soit $c$ un élément extrémal de $K_h$, non constant égal à $h$. D'après III.3., pour tout $t < b$, $c(t) < h$.
On fixe arbitrairement $\tau \in ]-\infty, b[$ tel que $0 < c(\tau) < h$ (possible car $c$ est continue).
Et on note $\lambda = \dfrac{c(\tau)}{h} \in ]0, 1[$. Soient $f : t \mapsto \dfrac{c(t) - c(t-b+\tau)}{1-\lambda}$ et $g : t \mapsto \dfrac{c(t-b+\tau)}{\lambda}$.

i. Montrer que $f$ et $g$ appartiennent à $K_h$.

---

- Puisque $\tau < b$, alors pour tout $t \in ]-\infty, b[$, $t - b + \tau < t < b$, donc $f$ et $g$ sont bien définies sur $]-\infty, b[$.
- $g(b)$ se calcule aisément : $g(b) = \dfrac{c(b-b+\tau)}{\lambda} = \dfrac{c(\tau)}{\frac{c(\tau)}{h}} = h$. Par continuité de $c$, on peut écrire : $\lim\limits_{b^-} g = h$.

  Par addition de fonctions admettant une limite en $b$, on trouve que $f$ admet également une limite en $b$,
  et $\lim\limits_{t \to b^-} f(t) = \dfrac{h - c(\tau)}{1 - \frac{c(\tau)}{h}} = \dfrac{h - c(\tau)}{h - c(\tau)} h = h$.
- D'après I.4.(c), en notant $\psi : t \mapsto t - b + \tau$, $\lambda g = c \circ \psi$ est absolument monotone sur $]-\infty, b + b - \tau[$.
  On peut restreindre sur $]-\infty, b[$ (les dérivations existent bien et sont toujours positifs).
  Et par produit par $\dfrac{1}{\lambda} > 0$, on a donc $g \in \mathcal{A}(]-\infty, b[)$.

Pour $f$ c'est plus subtil : il y a une soustraction.
$f$ est toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, b[$ et on montre (récurrence rapide) que $f^{(p)}(t) = \dfrac{c^{(p)}(t) - c^{(p)}(t-b+\tau)}{1-\lambda}$.
Puis comme $c^{(p+1)} \geqslant 0$, $c^{(p)}$ est croissante et donc $\dfrac{c^{(p)}(t) - c^{(p)}(t-b+\tau)}{1-\lambda} \geqslant 0$.

$$\boxed{f \in K_h \text{ et } g \in K_h.}$$

---

ii. Exprimer $c$ à l'aide de $\lambda$, $f$ et $g$.
Puis en déduire que : $\forall\ t < b$ et $\forall\ \tau < b$ tel que $c(\tau) \neq 0$, $c(t)c(\tau) = hc(t - b + \tau)$.

---

Il suffit de faire le calcul. Pour tout $t < b$ :

$$\boxed{(1-\lambda)f(t) + \lambda g(t) = c(t) - c(t-b+\tau) + c(t-b+\tau) = c(t)}$$

Or $c$ est point extrémal du compact $K_h$, donc nécessairement $g = c$ (et $f = c$).
Cela donne donc, pour tout $t \in ]-\infty, b[$, $c(t) = \dfrac{c(t-b+\tau)}{\frac{c(t)}{h}}$, et donc $c(t)c(\tau) = hc(t-b+\tau)$.
Enfin, $\tau$ a été fixé arbitrairement, mais n'importe quel nombre $\tau < b$ aurait fait l'affaire. La seule condition $c(\tau) \neq 0$. Donc

$$\boxed{\forall\ t < b \text{ et } \forall\ \tau < b \text{ tel que } c(\tau) \neq 0,\ c(t)c(\tau) = hc(t-b+\tau)}$$

---

iii. En déduire que pour tout $t < b$, $c(t) > 0$.

---

S'il existe $t < b$ tel que $c(t) = 0$, alors $C_0 := \{s \in ]-\infty, b[ \mid c(s) = 0\}$ est non vide, majoré par $b$ donc $C_0$ admet une borne supérieure, notée $s$.
Il existe une suite d'éléments de $C_0$ qui converge vers $s$ : $(s_n) \in C_0^{\mathbb{N}} \to s$.
Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c(s_n) = 0$. Par continuité de $c$ (absolument monotone) : $0 = c(s_n) \to c(s)$.
Donc $s \in C_0$.
Par ailleurs, $c$ est croissante donc en considérant un nombre $\tau$ comme les questions précédentes : $s < \tau < b$.
Et donc $s < s + b - \tau$ car $b - \tau > 0$ et $s + b - \tau < b$ car $s < \tau$.
Or $c(s + b - \tau)c(\tau) = hc((s + b - \tau) - b + \tau) = hc(s) = 0$. Comme $c(\tau) \neq 0$, $c(s + b - \tau) = 0$.
On a trouvé un élément de $C_0$ plus grand que $s$. Impossible. Donc $C_0$ est vide.

$$\boxed{\text{Pour tout } t < b,\ c(t) > 0.}$$

---

iv. On note $\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \ln \dfrac{c(u+b)}{h} \end{array} \right.$, ce qui a du sens d'après la question précédente.
Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}_-^*$, $\psi(u) + \psi(v) = \psi(u+v)$.

---

$\psi$ est bien définie sur $\mathbb{R}_-^*$, puisque dans ce cas là $u + b < b$, donc $u + b \in \mathcal{D}_c$.
On a ensuite, pour tout $u, v < 0$ :

$$\psi(u) + \psi(v) = \ln \frac{c(u+b)}{h} + \ln \frac{c(v+b)}{h} = \ln \frac{c(u+b)c(v+b)}{h^2} = \ln \frac{hc((u+b) - b + (v+b))}{h^2} = \psi(u+v)$$

où l'on a utilisé la relation précédente, avec $t \leftarrow u + b$ et $\tau \leftarrow v + b$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } u, v \in \mathbb{R}_-^*,\ \psi(u) + \psi(v) = \psi(u+v).}$$

---

v. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $c = f_\alpha$.

---

**1.** Soit $u < 0$ fixé. Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ : $\psi(nu) = n\psi(u)$.

**2.** Soit $u < 0$ fixé. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Avec $u' = \dfrac{p}{q}u$,

$$p\psi(u)\psi(pu) = \psi(qu') = q\psi(u') = q\psi(\frac{p}{q}u)$$

Donc en divisant par $q \neq 0$, $\psi(\dfrac{p}{q}u) = \dfrac{p}{q}\psi(u)$. Et pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, $\psi(ru) = r\psi(u)$

**3.** Soit $u < 0$ fixé. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{Q}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $(r_n) \to x$.
Par continuité de $c$ (absolument monotone) puis de ln, $\psi$ est continue et donc :

$$\forall\ u < 0, \qquad \psi(xu) = \psi(\lim r_n u) = \lim(\psi(r_n u) = \lim(r_n\psi(u)) = \lim(r_n) \times \psi(u) = x\psi(u)$$

On a donc en particulier pour $\alpha = -\psi(-1) > 0$, et $x < 0$,

$$\psi(x) = \psi(-x \times -1) = (-x)\psi(-1) = x\alpha$$

Et par conséquent, en composant par exp : pour tout $x < 0$, $c(x+b) = h\exp(\alpha x)$ et donc en $t < b$ (et $x \leftarrow t-b$) :

$$\boxed{\exists\ \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\ t < b, \quad c(t) = h\exp(\alpha(t-b)) = f_\alpha(t)}$$

Une autre option est de noter que $\psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, puisque $c$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
En fait, toutes ces fonctions sont même de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Si on dérive (par rapport à $u$) la relation fonctionnelle, on trouve pour tout $u, v < 0$ : $\psi'(u) = \psi'(u+v)$.
On a donc $u \mapsto \psi'(u)$ est constante, et donc $\exists\ A, B \in \mathbb{R}$ tel que $\psi : u \mapsto Au + B$ et on retrouve le résultat précédent.

---

(c) Conclure

---

Pour répondre à la question 5.(a), on a supposé que $c$ est non constant égal à $h$.
Le cas $c = h$ est également un cas extrémal acceptable, il correspond à $f_\alpha$ pour $\alpha = 0$.

$$\boxed{\text{Si } c \text{ est un point extrémal de } K_h, \text{ alors il existe } \alpha \geqslant 0 \text{ tel que } c = f_\alpha : ]-\infty, b[\to \mathbb{R}_+,\ t \mapsto h \times e^{\alpha(t-b)}.}$$

---

On dit qu'une suite de fonction $f_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ **converge (simplement)** vers $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ si $\forall\ x \in I$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

III.6. Nous allons montrer que dans $K_h$ la convergence simple donne pour limite une suite continue.
Considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K_h$ convergente (simplement) vers $f$.

(a) Montrer que $f$ est croissante sur $]-\infty, b[$.

---

Soient $x < y (< b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissance de $f_n$ : $f_n(x) \leqslant f_n(y)$.
Ces suites convergent et l'inégalité est conservée par passage à la limite, donc

$$\boxed{\forall\ x < y(< b), \quad f(x) \leqslant f(y)}$$

---

(b) Montrer que $f$ admet une limite à gauche en $b$ égale à $h$.

---

Pour tout $x < b$, et tout $n \in \mathbb{N}$ : $f_n(x) \leqslant \lim\limits_{x\to b^-} f_n(x) = h$, par croissance de $f_n$.
Puis en passant à la limite, qui conserve les inégalités larges : $f(x) \leqslant h$.
Par ailleurs, $f$ est croissante (question précédente) et majorée, donc $f$ admet une limite en $b^-$.

$$\boxed{f(x) \leqslant f(y)}$$

On notera que l'on ne peut pas espérer obtenir mieux comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(\theta_n : x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolument monotones sur $]0, 1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n(x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 1$ alors que $\theta = \lim \theta_n$ est la fonction identiquement nulle sur $]0, 1[$.

---

(c) (*) Montrer que $f$ est continue. *On pourra exploiter la majoration exploitée en III.3.*

---

Commençons par un lemme en exploitant III.3.
Pour tout $x \in ]-\infty, b[$, $\forall\ t \in \left[\dfrac{3x+b}{2}, \dfrac{x+b}{2}\right] = [x-a, x+a]$, avec $a = \dfrac{b-x}{2}$,

pour toute fonction $\psi \in K_h$, $|\psi(x) - \psi(t)| \leqslant \dfrac{2h}{b-x}|x-t|$.

En effet, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour $t \in \left[\dfrac{3x+b}{2}, \dfrac{x+b}{2}\right]$ :

$$|\psi(x) - \psi(t)| \leqslant \sup_{u\in]x,t[} |\psi'(u)||x-t| \leqslant \psi'\left(\frac{x+b}{2}\right)|x-t|$$

où l'on a exploité la croissance de $\psi'$.
Ensuite, par la majoration en III.3, on a $(0 \leqslant)\psi'\left(\frac{x+b}{2}\right) \leqslant \frac{h}{b-\frac{x+b}{2}} = \frac{2h}{b-x}$. Ce qui donne le résultat annoncé.
On note le résultat important : cette majoration est indépendante de la fonction $\psi$ considérée !

Fixons $x_0 < b$ et montrons la continuité en $x_0$.
Soit $\epsilon > 0$.

1. Il existe $a_1 > 0$ tel que $\forall\, t \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1]$, $\frac{2h}{b-x_0}|x_0 - t| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$ car $\lim_{t\to x_0} \frac{2h}{b-x_0}|x_0 - t| = 0$.
Prenons $A = \min(a_1, \frac{b-x}{2})$, on a alors, pour toute fonction $\psi \in K_h$,

$$\forall\, t \in [x_0 - A, x_0 + A], \qquad |\psi(x_0) - \psi(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$$

Et en particulier :

$$\forall\, t \in [x_0 - A, x_0 + A], \qquad \psi(x_0) - \frac{\epsilon}{3} \leqslant \psi(t) \leqslant \psi(x_0) + \frac{\epsilon}{3}$$

2. Les applications $f_n(x_0)$, $f_n(x_0 + A)$ et $f_n(x_0 - A)$ convergent respectivement vers $f(x_0)$, $f(x_0 + \eta)$ et $f(x_0 - \eta)$.
Ainsi, il existe $N$ (qui à prendre un maximum) tel que

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{3} \qquad \& \qquad |f_N(x_0 + A) - f(x_0 + A)| \leqslant \frac{\epsilon}{3} \qquad \& \qquad |f_N(x_0 - \eta) - f(x_0 - \eta)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$$

On a donc en particulier :

$$f(x_0 + A) \leqslant f_N(x_0 + A) + \frac{\epsilon}{3} \qquad \& \qquad f_N(x_0) \leqslant f(x_0) + \frac{\epsilon}{3}$$

Et

$$f(x_0 - A) \geqslant f_N(x_0 - A) + \frac{\epsilon}{3} \qquad \& \qquad f_N(x_0) \geqslant f(x_0) - \frac{\epsilon}{3}$$

3. Soit $t \in [x_0 - A, x_0 + A]$ :
Par croissance de $f$ :

$$f(t) \leqslant f(x_0 + A) \leqslant f_N(x_0 + A) + \frac{\epsilon}{3} \leqslant f_N(x_0) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \leqslant f(x_0) + \epsilon$$

Et de même,

$$f(t) \geqslant f(x_0 - A) \geqslant f_N(x_0 - A) - \frac{\epsilon}{3} \geqslant f_N(x_0) - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} \geqslant f(x_0) - \epsilon$$

Donc, pour tout $t \in [x_0 - A, x_0 + A]$, $|f(t) - f(x)| \leqslant \epsilon$.

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est continue en tout } x < b.}$$

---