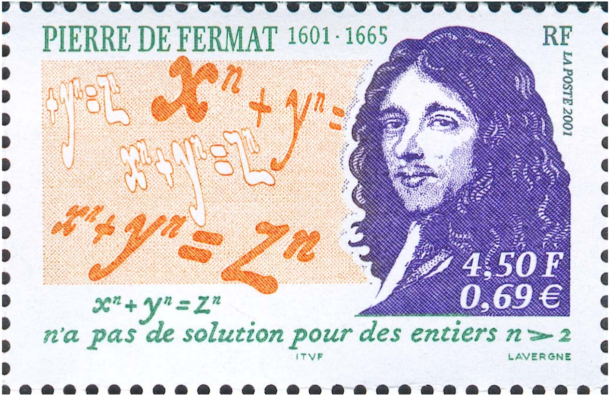

Leçon 73 - Espace vectoriel

18 mars 2025

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

Détermination par les bases

Théorème - Image d'une base

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et F un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = f_i.$$

On dit que u est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base.

Détermination par les bases

Théorème - Image d'une base

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et F un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = f_i.$$

On dit que u est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base.

Démonstration

Détermination par les bases

Théorème - Image d'une base

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et F un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de n vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = f_i.$$

On dit que u est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base.

Démonstration

Remarque Dimension infinie

Corollaires

Corollaire - Egalité d'applications

Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Corollaires

Corollaire - Egalité d'applications

Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Corollaire - Applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$

Soit $u \in Ł_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$. Alors u est de la forme

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^p \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix} \end{array} \text{ où } \begin{cases} \forall i \in [\![1,p]\!] \\ \forall j \in [\![1,n]\!], \end{cases} , a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Réciproquement, toute application de cette forme est linéaire du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^p$.

Coordonnées

Proposition - Surjection coordonnée

Tout $\mathbb{K}$-e.v de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Si $\mathscr{B}$ une base de E $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie non nulle n. Alors

$$\begin{aligned} u: \quad & E \to \mathbb{K}^n \\ & x \mapsto \text{ coordonnées de } x \text{ dans } \mathscr{B} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Coordonnées

Proposition - Surjection coordonnée

Tout $\mathbb{K}$-e.v de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Si $\mathscr{B}$ une base de E $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie non nulle n. Alors

$$u : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto \text{ coordonnées de } x \text{ dans } \mathscr{B} \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Coordonnées

Proposition - Surjection coordonnée

Tout $\mathbb{K}$-e.v de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Si $\mathscr{B}$ une base de E $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie non nulle n. Alors

$$\begin{aligned} u: \quad & E \to \mathbb{K}^n \\ & x \mapsto \text{ coordonnées de } x \text{ dans } \mathscr{B} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Corollaire - Sans passer par $\mathbb{K}^n$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-e.v. a priori quelconque.

Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie avec $\dim F = \dim E$.

Coordonnées

Proposition - Surjection coordonnée

Tout $\mathbb{K}$-e.v de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Si $\mathscr{B}$ une base de E $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie non nulle n. Alors

$$\begin{array}{rrcl} u: & E & \to & \mathbb{K}^n \\ & x & \mapsto & \text{coordonnées de } x \text{ dans } \mathscr{B} \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Corollaire - Sans passer par $\mathbb{K}^n$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-e.v. a priori quelconque.

Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie avec $\dim F = \dim E$.

Démonstration

$\mathscr{L}(E,F)$

Théorème - Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F.$$

Théorème - Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration

$\mathscr{L}(E,F)$

Théorème - Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration

Remarque Espace dual

Détermination par la restriction à des supplémentaires

E,F désignent toujours deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème

Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires dans E et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F), u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

Détermination par la restriction à des supplémentaires

E, F désignent toujours deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème

Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires dans E et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F), u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

Plus généralement :

Théorème - Description unique sur une famille de supplémentaires

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des s.e.v. de E (de dimension quelconque) vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $\forall i, u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i, u_{|E_i} = u_i$

Détermination par la restriction à des supplémentaires

E,F désignent toujours deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème

Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires dans E et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F), u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

Plus généralement :

Théorème - Description unique sur une famille de supplémentaires

Si $E_1,\dots,E_p$ sont des s.e.v. de E (de dimension quelconque) vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $\forall i, u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\forall i, u_{|E_i} = u_i$

Démonstration

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition - Matrice d'une famille de p vecteurs

La matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de E est la matrice dont la j-ième colonne, pour $j \in [\![1, p]\!]$, est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$. C'est donc la matrice à n lignes et p colonnes :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p}$$

telle que, pour tout j, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition - Matrice d'une famille de p vecteurs

La matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E est la matrice dont la j-ième colonne, pour $j \in [\![1, p]\!]$, est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$. C'est donc la matrice à n lignes et p colonnes :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p}$$

telle que, pour tout j, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$

Cas particulier $p = 1$

Heuristique - Cas particulier $p = 1$: la « matrice du vecteur x dans $\mathscr{B}$ »

Dans le cas particulier d'une famille à un vecteur x, la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x)$ est une matrice colonne, c'est la matrice colonne formée des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On parle souvent de la « matrice du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$ ».

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x &\mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x) \end{aligned}$$

est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels. On identifie donc usuellement matrices colonnes (à n lignes) et vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Matrice d'une application linéaire

Définition - Matrice d'un morphisme u

E et F sont deux $\mathbb{K}$ev, de dimension resp. n et p).
$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \cdots, f_p)$ bases de E et de F resp..
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\forall j \in [\![1, n]\!], u(e_j) \in F$ et donc on peut écrire $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$.
On appelle **matrice de** u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, la matrice :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathscr{M}(u, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p; 1 \leqslant j \leqslant n}$$

a_{ij} désigne la i-ième coordonnée de $u(e_j)$ dans $\mathscr{C}$.
C'est la matrice dans $\mathscr{C}$ de la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Attention - Taille de la matrice

Il s'agit d'une matrice à n colonnes (nombre de vecteurs d'une base de l'ensemble de départ) et p lignes (dimension de l'ensemble d'arrivée), soit p lignes et n colonnes.

Attention - Taille de la matrice

Il s'agit d'une matrice à n colonnes (nombre de vecteurs d'une base de l'ensemble de départ) et p lignes (dimension de l'ensemble d'arrivée), soit p lignes et n colonnes.

Exemple Matrice de $P \mapsto P'$ (n=3)

De la matrice au morphisme

Théorème - Réciproquement de la matrice au morphisme

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $\dim E = n$, $\dim F = p$. On suppose fixées $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A$.

De la matrice au morphisme

Théorème - Réciproquement de la matrice au morphisme

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $\dim E = n$, $\dim F = p$. On suppose fixées $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A$.

Démonstration

De la matrice au morphisme

Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $\dim E = n$, $\dim F = p$. On suppose fixées $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathscr{B}$, alors la matrice colonne Y des coordonnées de $y = u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est donnée par la relation $Y = AX$.

De la matrice au morphisme

Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $\dim E = n$, $\dim F = p$. On suppose fixées $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathscr{B}$, alors la matrice colonne Y des coordonnées de $y = u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est donnée par la relation $Y = AX$.

Démonstration

De la matrice au morphisme

Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $\dim E = n$, $\dim F = p$. On suppose fixées $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathscr{B}$, alors la matrice colonne Y des coordonnées de $y = u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est donnée par la relation $Y = AX$.

Démonstration

Corollaire - Nouveau critère d'égalité matriciel

Soient $A,B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors :
$$\left(\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = BX\right) \Rightarrow A = B$$

De la matrice au morphisme

Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $\dim E = n$, $\dim F = p$. On suppose fixées $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathscr{B}$, alors la matrice colonne Y des coordonnées de $y = u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est donnée par la relation $Y = AX$.

Démonstration

Corollaire - Nouveau critère d'égalité matriciel

Soient $A,B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\left(\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = BX\right) \Rightarrow A = B$$

Démonstration

Définition - Matrice d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ et se note simplement $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ (ou $\mathscr{M}(u,\mathscr{B})$).

Définition - Matrice d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ et se note simplement $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ (ou $\mathscr{M}(u,\mathscr{B})$).

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$

Définition - Matrice d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ et se note simplement $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ (ou $\mathscr{M}(u,\mathscr{B})$).

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$

Exercice

Quelle est la matrice dans la base $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice ?

$\mathscr{L}(F,G)$ & $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ isomorphes

Théorème - L'application linéaire $u \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $(\dim E = n, \dim F = p)$ de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $u,v \in \mathscr{L}(E,F)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ alors

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + \beta \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v).$$

L'application

$$\begin{array}{ll} \mathscr{L}(E,F) & \to \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{array}$$

est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$\mathscr{L}(F,G)$ & $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ isomorphes

Théorème - Produit matriciel et composition

Soient trois espaces vectoriels E, F, G munis des bases respectives $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$, et deux applications linéaires $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors la matrice de $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$ est donnée par

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$$

$\mathscr{L}(F,G)$ & $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ isomorphes

Théorème - Produit matriciel et composition

Soient trois espaces vectoriels E, F, G munis des bases respectives $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$, et deux applications linéaires $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors la matrice de $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$ est donnée par

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$$

Démonstration

Remarque Nouvelle interprétation du produit matriciel

Remarque Nouvelle interprétation du produit matriciel

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E. L'application $u \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (isomorphisme d'espaces vectoriels et morphisme d'anneaux)

Bijection et réciproque

Proposition - Bijection de u et inversibilité de $\mathscr{M}$

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n (en particulier on peut avoir $E = F$) de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$,
Soit u une application linéaire de E dans F et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
Alors u est bijective si et seulement si A est inversible.
Et alors $\quad A^{-1} = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1})$

Bijection et réciproque

Proposition - Bijection de u et inversibilité de $\mathscr{M}$

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n (en particulier on peut avoir $E = F$) de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$,
Soit u une application linéaire de E dans F et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
Alors u est bijective si et seulement si A est inversible.
Et alors $\quad A^{-1} = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1})$

Savoir-faire. Exploitation

Ce résultat peut être utilisé de deux façons :

- Pour trouver l'isomorphisme réciproque de u, on calcule l'inverse de la matrice de u (voir plus loin pour les méthodes).
- Pour trouver l'inverse d'une matrice, on peut parfois la reconnaître comme la matrice d'un isomorphisme dont on sait facilement exprimer l'endomorphisme réciproque.

Bijection et réciproque

Proposition - Bijection de u et inversibilité de $\mathscr{M}$

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n (en particulier on peut avoir $E = F$) de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$,
Soit u une application linéaire de E dans F et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
Alors u est bijective si et seulement si A est inversible.
Et alors $\quad A^{-1} = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1})$

Savoir-faire. Exploitation

Ce résultat peut être utilisé de deux façons :

- Pour trouver l'isomorphisme réciproque de u, on calcule l'inverse de la matrice de u (voir plus loin pour les méthodes).
- Pour trouver l'inverse d'une matrice, on peut parfois la reconnaître comme la matrice d'un isomorphisme dont on sait facilement exprimer l'endomorphisme réciproque.

Démonstration

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$ (avec la convention $\binom{j}{i} = 0$ si $j < i$) pour $i, j \in [\![1, n+1]\!]^2$. Justifier l'inversibilté de A et déterminer A^{-1}.

Réciproquement, application canoniquement associée à une matrice

Heuristique. Identification

L'application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un isomorphisme naturel ("canonique") entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il permet d'identifier un n-uplet x avec la matrice colonne X.

D'autre part, on sait que si $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, alors u est de la forme

$$u : \begin{array}{ll} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^p \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{où } \forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], a_{ij} \in$$

Réciproquement, application canoniquement associée à une matrice

Définition - Application canoniquement associée à A

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de u dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ soit A. On dit alors que u est canoniquement associée à A.
u peut alors être identifiée à l'application

$$\begin{array}{ll} \mathscr{M}_{n,1} & \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto AX \end{array}$$

Noyau, image d'une matrice

Remarque Convention d'usage

$\Rightarrow \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$

Noyau, image d'une matrice

Remarque Convention d'usage

Proposition - Noyau, image

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et u l'application linéaire canoniquement associée.
On rappelle que :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, AX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

$$\text{Im } A = \{Y \in \mathbb{K}^p \equiv \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \,|\, \exists X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}.$$

Par les identifications précédentes $\text{Ker } A = \text{Ker } u$ et $\text{Im } A = \text{Im } u$.

Réinterprétation du produit par blocs

Proposition - Blocs nuls et stabilité

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E $\mathbb{K}$-e.v. $(\dim E = n, \dim F = p)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que la matrice de u s'écrive, dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$). Alors :

- F est stable par u si et seulement si $C = O_{n-p,p}$; dans ce cas $A = \mathscr{M}(u_{|F})$
- G est stable par u si et seulement si $B = O_{p,n-p}$; dans ce cas $D = \mathscr{M}(u_{|G})$

Réinterprétation du produit par blocs

Proposition - Blocs nuls et stabilité

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E $\mathbb{K}$-e.v. $(\dim E = n, \dim F = p)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que la matrice de u s'écrive, dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$). Alors :

- F est stable par u si et seulement si $C = O_{n-p,p}$; dans ce cas $A = \mathscr{M}(u_{|F})$
- G est stable par u si et seulement si $B = O_{p,n-p}$; dans ce cas $D = \mathscr{M}(u_{|G})$

Démonstration

Exercice

Montrer que les projecteurs et les symétries ont, dans des bases bien choisies, des matrices par blocs très simples.

Exercice

Montrer que les projecteurs et les symétries ont, dans des bases bien choisies, des matrices par blocs très simples.

Remarque Généralisation

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

Matrice de passage

Définition - Matrice de passage (changement de base vectoriel)

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n,
$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ (ancienne) et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ (nouvelle), deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ (ou $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$), la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \cdots, e'_n)$$

Matrice de passage

Définition - Matrice de passage (changement de base vectoriel)

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n,
$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ (ancienne) et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ (nouvelle), deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ (ou $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$), la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \cdots, e'_n)$$

Attention. Ecrire la bonne matrice

On obtient donc la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ en écrivant en colonnes les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs e'_i (de $\mathscr{B}'$).
(C'est celle que l'on sait écrire sans problème car les vecteur e'_i sont toujours donnés par leurs coordonnées dans $\mathscr{B}$)

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$.
Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif) et $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$.
Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif) et $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Pas de démonstration supplémentaire.

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$.
Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif) et $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Pas de démonstration supplémentaire.

Théorème - Calcul matriciel du changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Si X est la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ de $x \in E$ et X' la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}'$ de x, alors $X = PX'$, c'est-à-dire

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(x)$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

$\Rightarrow$ Impact d'un changement de bases

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

- Etant donnée une base de E (dim n),
  $(x_1, \ldots x_p) \in E^p \to (X_1, \ldots X_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

- Etant donnée une base de E (dim n), $(x_1,\dots x_p)\in E^p \to (X_1,\dots X_p)\in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- de même $u\in\mathscr{L}(E,F)\to\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (avec $n=\dim F$, et $p=\dim E$ (à partir de la famille des images des vecteurs d'une base)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

- Etant donnée une base de E (dim n), $(x_1, \ldots x_p) \in E^p \to (X_1, \ldots X_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- de même $u \in \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (avec $n = \dim F$, et $p = \dim E$ (à partir de la famille des images des vecteurs d'une base)
- Réciproquement : pour $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

- Etant donnée une base de E (dim n), $(x_1, \ldots x_p) \in E^p \to (X_1, \ldots X_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- de même $u \in \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (avec $n = \dim F$, et $p = \dim E$ (à partir de la famille des images des vecteurs d'une base)
- Réciproquement : pour $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.
- Définitions de $\mathrm{Im}\ M$, $\mathrm{Ker}\ M$

Conclusion

Objectifs

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

⇒ Impact d'un changement de bases

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

$\Rightarrow$ Impact d'un changement de bases

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

$\Rightarrow$ Impact d'un changement de bases

Conclusion

Objectifs

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

⇒ Impact d'un changement de bases

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

$\Rightarrow$ Impact d'un changement de bases

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

$\Rightarrow$ Impact d'un changement de bases

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  4. Rang
- Exercice n° 519 & 520 8h-10h : N°522, 523, 531, 533
  10h-12h : N°524, 527, 530, 533