



Leçon 74 - Espace vectoriel

Leçon 74 - Espace vectoriel

⇒ Changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
 - 3.1. Détermination
 - 3.2. Matrice d'une application linéaire
 - 3.3. Changements de bases
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application

20 mars 2025

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

**3.2. Matrice d'une application
linéaire**

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Matrice d'une application linéaire

Définition - Matrice d'un morphisme u

E et F sont deux \mathbb{K} ev, de dimension resp. n et p .

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ bases de E et de F resp..

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_j) \in F$ et donc on peut

$$\text{écrire } u(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i.$$

On appelle **matrice de u** dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} , la matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \mathcal{M}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n}$$

a_{ij} désigne la i -ième coordonnée de $u(e_j)$ dans \mathcal{C} .

C'est la matrice dans \mathcal{C} de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Réciproquement, application canoniquement associée à une matrice

Définition - Application canoniquement associée à A

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de u dans les bases canoniques respectives de \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^p soit A . On dit alors que u est canoniquement associée à A .

u peut alors être identifiée à l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,1} &\rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Noyau, image d'une matrice

Remarque Convention d'usage

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Noyau, image d'une matrice

Remarque Convention d'usage

Proposition - Noyau, image

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et u l'application linéaire canoniquement associée.

On rappelle que :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

$$\text{Im } A = \{Y \in \mathbb{K}^p \equiv \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}.$$

Par les identifications précédentes $\text{Ker } A = \text{Ker } u$ et
 $\text{Im } A = \text{Im } u$.

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Matrice de passage

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Définition - Matrice de passage (changement de base vectoriel)

Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n ,

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (ancienne) et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ (nouvelle), deux bases de E .

On appelle matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ (ou $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$), la matrice de la famille \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$$

1. Problèmes

2. Bases et
dimension3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E)$.

Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif)

et $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E)$.

Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif)

et $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Pas de démonstration supplémentaire.

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E)$.

Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif)
et $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Pas de démonstration supplémentaire.

Théorème - Calcul matriciel du changement de base

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Si X est la matrice colonne des coordonnées dans \mathcal{B} de $x \in E$ et X' la matrice colonne des coordonnées dans \mathcal{B}' de x , alors $X = PX'$, c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$$

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Savoir-faire. Petite aide mnémotechnique

Se souvenir que la formule donne facilement les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base, ce qui est rarement ce dont on a besoin ! Pour avoir les coordonnées dans la nouvelle base en fonction des anciennes, il faut calculer P^{-1} .

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Retenir...

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

Savoir-faire. Petite aide mnémotechnique

Se souvenir que la formule donne facilement les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base, ce qui est rarement ce dont on a besoin ! Pour avoir les coordonnées dans la nouvelle base en fonction des anciennes, il faut calculer P^{-1} .

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Théorème - Changement de base d'une application de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E, F deux \mathbb{K} -e.v., de bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' pour E , \mathcal{C} et \mathcal{C}' pour F . On pose $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

Alors, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$, $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$ on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Matrices équivalentes

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Théorème - Changement de base d'une application de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E, F deux \mathbb{K} -e.v., de bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' pour E , \mathcal{C} et \mathcal{C}' pour F . On pose $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

Alors, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$, $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$ on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

Démonstration à bien savoir faire, pour retrouver rapidement le résultat :

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Remarque Rappel (??)

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Remarque Rappel (??)

Proposition - Nouvelle interprétation de l'équivalence matricielle

$A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même applications linéaire dans des bases différentes (a priori au départ et à l'arrivée)

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Remarque Rappel (??)

Proposition - Nouvelle interprétation de l'équivalence matricielle

$A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même applications linéaire dans des bases différentes (a priori au départ et à l'arrivée)

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Dans le cas particulier où $E = F$ on peut prendre $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$ d'où $Q = P$ et on a le théorème suivant :

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Dans le cas particulier où $E = F$ on peut prendre $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$ d'où $Q = P$ et on a le théorème suivant :

Théorème -

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Alors, si $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ on a

$$A' = P^{-1}AP$$

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Exercice

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère les deux vecteurs $f_1 = (1, 2)$ et $f_2 = (1, 3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ est une base de E .
2. Soit \mathcal{B} la base canonique de E . Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
3. Soit $x = (4, 1) \in E$. Déterminer matriciellement les coordonnées de x dans la base \mathcal{B}' .
4. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u((x, y)) = (2x + y, x - y)$. Ecrire les matrices de u dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Définition - Matrices semblables

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Écriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

Définition - Matrices semblables

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque Relation d'équivalence

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

On a alors, par récurrence,

Proposition - Calcul de puissance

Si A et B son semblables, précisément : $B = P^{-1}AP$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$ (car $PP^{-1} = I_n$).

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Application

On a alors, par récurrence,

Proposition - Calcul de puissance

Si A et B sont semblables, précisément : $B = P^{-1}AP$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$ (car $PP^{-1} = I_n$).

Théorème - Ré-interprétation de la similitude

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors les matrices A et B sont semblables si et seulement si

il existe \mathcal{B} et \mathcal{B}' , bases de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$.

Autrement dit, A et B sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Truc et Astuce

Truc & Astuce. Etant donnée A et B , trouver \mathcal{B} , \mathcal{B}' et u

Il n'y a pas unicité du triplet $(\mathcal{B}, \mathcal{B}', u)$. Il faut donc choisir un représentant. En revanche, on connaît A et B puis donc P .

⇒ Changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application



Truc et Astuce

Truc & Astuce. Etant donnée A et B , trouver \mathcal{B} , \mathcal{B}' et u

Classiquement, on considère (dans l'ordre) :

1. $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (équivalent à \mathbb{K}^n)
2. $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$, la base canonique de E
3. $u : X \mapsto A \times X$. Par construction $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

En fait, comme \mathcal{B} est la base canonique,

$$AX_j = C_j(A) = \sum_{i=1}^n [A]_{i,j} X_i$$

4. $\mathcal{B}' = P(\mathcal{B}) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (PX_1, PX_2, \dots, PX_n)$, c'est bien une base car P est inversible.

$u(Y_j) = u(PX_j) = APX_j = P^{-1}BX_j = P^{-1}C_j(B)$, car \mathcal{B} b. cano.

Donc

$$u(Y_j) = P^{-1} \sum_{i=1}^n [B]_{i,j} X_i = \sum_{i=1}^n [B]_{i,j} P^{-1} X_i = \sum_{i=1}^n [B]_{i,j} Y_i$$

Ainsi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = B$

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à ${}^t A$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Proposition - Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Trace de matrice semblable

Proposition - Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Trace de matrice semblable

Proposition - Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration

Définition - Trace d'un endomorphisme

Soit E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de E .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u le scalaire

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}(u) = \operatorname{Tr} M_{\mathcal{B}}(u).$$

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Trace de matrice semblable

Proposition - Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration

Définition - Trace d'un endomorphisme

Soit E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de E .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u le scalaire

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}(u) = \operatorname{Tr} M_{\mathcal{B}}(u).$$

Remarque Une démonstration ?

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Corollaire - Propriétés simples de tr

L'application trace sur $\mathcal{L}(E)$ est linéaire et

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u).$$

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Propriété de la trace d'un endomorphisme

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

Corollaire - Propriétés simples de tr

L'application trace sur $\mathcal{L}(E)$ est linéaire et

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u).$$

Proposition - Rang=trace d'un projecteur

Soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Propriété de la trace d'un endomorphisme

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Corollaire - Propriétés simples de tr

L'application trace sur $\mathcal{L}(E)$ est linéaire et

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u).$$

Proposition - Rang=trace d'un projecteur

Soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
 - 3.1. Détermination
 - 3.2. Matrice d'une application linéaire
 - 3.3. Changements de bases
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Rang(s)

Définition - Rang d'une application linéaire

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\text{Im } u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\text{Im } u$:

$$\text{rg } u = \dim \text{Im } u$$

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
 - 3.1. Détermination
 - 3.2. Matrice d'une application linéaire
 - 3.3. Changements de bases
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application

Rang(s)

Définition - Rang d'une application linéaire

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\text{Im } u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\text{Im } u$:

$$\text{rg } u = \dim \text{Im } u$$

Rappels :

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille finie de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle rang de la famille (x_1, \dots, x_p) la dimension du sous-espace vectoriel $\text{vect}(x_1, \dots, x_p)$:

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$$

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Rang d'une matrice

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

Définition - Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ On appelle rang de A (noté $\text{rg}A$) la dimension de $\text{Im } A$.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Théorème du rang - Lemme préparatoire

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

Proposition - Isomorphisme canonique (de projection)

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E alors l'application

$$\begin{aligned}\bar{u}: S &\rightarrow \text{Im } u \\ x &\mapsto u(x)\end{aligned}$$

est un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Théorème du rang - Lemme préparatoire

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Proposition - Isomorphisme canonique (de projection)

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E alors l'application

$$\begin{aligned}\bar{u}: S &\rightarrow \text{Im } u \\ x &\mapsto u(x)\end{aligned}$$

est un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Théorème du rang

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

Théorème - Théorème du rang

Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, F un \mathbb{K} -e.v. (de dimension quelconque) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Théorème du rang

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

Théorème - Théorème du rang

Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, F un \mathbb{K} -e.v. (de dimension quelconque) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Proposition - Critère de surjection/injection

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ▶ Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si u est injective.
- ▶ Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim F$ avec égalité si et seulement si u est surjective.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Écriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

→ Changement de
bases

→ Théorème du rang

Proposition - Critère de surjection/injection

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ▶ Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si u est injective.
- ▶ Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim F$ avec égalité si et seulement si u est surjective.

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Écriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Equivalence des caractéristique en dimension finie

Si E et F sont de dimensions finies on a donc
 $\operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$

Théorème - Equivalences des caractères de u (cas dimension finie)

E, F deux K -espaces vectoriels de **dimensions finies égales** ($\dim F = \dim E$). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence de

- (i) $\operatorname{rg} u = \dim E$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un isomorphisme)

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Equivalence des caractéristique en dimension finie

Si E et F sont de dimensions finies on a donc
 $\operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$

Théorème - Equivalences des caractères de u (cas dimension finie)

E, F deux K -espaces vectoriels de **dimensions finies égales** ($\dim F = \dim E$). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence de

- (i) $\operatorname{rg} u = \dim E$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un isomorphisme)

Démonstration

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Equivalence des caractéristique en dimension finie

Si E et F sont de dimensions finies on a donc
 $\operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$

Théorème - Equivalences des caractères de u (cas dimension finie)

E, F deux K -espaces vectoriels de **dimensions finies égales**
 ($\dim F = \dim E$). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence de

- (i) $\operatorname{rg} u = \dim E$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un isomorphisme)

Démonstration

Remarque Dans la pratique : u endomorphisme

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conservation du rang

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

Proposition - Conservation du rang

E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies,
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

- ▶ si u est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg} v$
- ▶ si v est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg} u$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conservation du rang

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

Proposition - Conservation du rang

E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies,
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

- ▶ si u est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg} v$
- ▶ si v est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg} u$

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

On obtient ainsi la caractérisation des automorphismes en dimension finie :

Théorème - Cas des endomorphismes

E un \mathbb{K} -espace vectoriel de **dimension finie** n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a équivalence de

- (i) $\operatorname{rg} u = n$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un automorphisme, soit $u \in GL(E)$)
- (v) il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$ (u admet un inverse à gauche)
- (vi) il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ w = Id_E$ (u admet un inverse à droite)

→ Changement de bases

→ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conclusion

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

- ▶ Même u : deux bases de E , deux bases de F :

⇒ Changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

- ▶ Même u : deux bases de E , deux bases de F :
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(u) = P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1, id) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(u) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1, id)$

⇒ Changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

- ▶ Même u : deux bases de E , deux bases de F :
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(u) = P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1, id) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(u) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1, id)$
- ▶ Matrices équivalentes, puis cas particulier des matrices semblables

⇒ Changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

- ▶ Même u : deux bases de E , deux bases de F :
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{E}_2}(u) = P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1, id) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{E}_1}(u) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1, id)$
- ▶ Matrices équivalentes, puis cas particulier des matrices semblables
- ▶ Définition d'une trace d'un endomorphisme et propriétés. Cas d'un projecteur.

⇒ Changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

- ▶ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E$.

⇒ Changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

▶ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E$.

▶ Si E ou F est de dimension finie, alors
 $\text{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

$$\text{rg } u = \dim E \iff u \text{ injective}$$

$$\text{rg } u = \dim F \iff u \text{ surjective}$$

⇒ Changement de bases

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

⇒ Changement de
bases

⇒ Théorème du rang

Objectifs

- ⇒ Impact d'un changement de bases
- ⇒ Théorème du rang

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
 - 4. Rang et forme linéaire.
- ▶ Exercice n° 521

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application
linéaire

3.3. Changements de bases

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application