Septième partie

Polynômes et fractions rationnelles

Chapitre 31

Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

Résumé -

Ce chapitre est le premier d'un série de quatre chapitres autour des polynômes. Chacun de ces chapitres apporte un point de vue (très) différent sur le même objet. L'enjeu est de pouvoir passer d'une façon de voir à une autre ; de ne pas s'enfermer dans un unique point de vue.
Dans ce chapitre, on motive l'intérêt de l'étude des polynômes : le calcul polynomiale (quitte à considérer plusieurs indéterminées) correspond peu ou prou au calcul dans tout anneau. C'est le lieu naturel du développement (distribution) dans une structure à deux lois. On verra aussi qu'il s'agit d'un espace vectoriel dans une famille génératrice est $(1, X, X^2, \ldots)$ *(nous en reparlerons au chapitre sur les espaces vectoriels).*
On se concentre donc ici aux opérations formelles à partir de polynôme : somme et produit, puis composition et enfin dérivation…

Sommaire

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (On pourrait généraliser les définitions à un autre corps.)

1. Problèmes

? Problème 131 - Polynômes et calculs algébriques

Etant donné un anneau A, il est possible de calculer $(a-b)\times(c-d)$. Et le résultat de ce calcul : $ac+bd-ad-bc$ est en fait *indépendant* de l'anneau considéré.
D'une certaine façon, le résultat ne dépend que du calcul lui-même.
Existe-t-il un ensemble des opérations algébriques et des résultats qui en découle ? Par exemple, que peut-on dire de $(1+a+a^2+a^3)(1-a)$. Est-ce que le résultat dépend si $a\in\mathbb{Z}$, ou $a\in\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou encore $a\in\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ ou bien a une matrice, une fonction (endomorphisme), un graphe, un arbre ?

? Problème 132 - Lois sur les polynômes

Si l'on considère deux polynômes $A=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B=\sum_{k=0}^{r} b_k X^k$, quelles sont les opérations naturelles que l'on peut faire avec ces polynômes $(+,\times,/,\circ\dots)$? Est-ce que l'ensemble des polynômes est stable pour ces lois ?
Et la dérivation ?

? Problème 133 - Expression algébrique

En prolongeant le problème précédent, si $A=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B=\sum_{k=0}^{r} b_k X^k$, quelle est l'expression du coefficient devant X^h pour les polynômes $A+B$, $A\times B$ et $A\circ B$?
Est-ce une expression simple que l'on a intérêt à retenir (par exemple pour calculer des DL) ? Quelle notation mérite alors d'être instaurée ?

? Problème 134 - Degré infini. Séries formelles

Pour éviter tout problème, les polynômes sont définis avec des degrés (valeur maximale à partir de laquelle tout est nulle).
Les lois algébriques que nous verrons peuvent-ils se noter avec de degré infini ? Peut-on créer une algèbre de polynôme de degrés non nécessairement finis (séries formelles) ?

? Problème 135 - Dérivation algébrique ?

La formule de Taylor permet, étant donnée une fonction f d'obtenir un DL au voisinage de a, sous forme polynomiale :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\big((x-a)^n\big)$$

Pour $a=0$, cela donne en particulier une expression du coefficient devant x^k. Mais il s'agit de dérivée la fonction f. Cette opération de dérivation s'obtient par un passage à la limite, totalement dépendant de l'ana-

lyse. Dans ce chapitre, nous aimerions exploiter ce genre de relation pour obtenir explicitement $[P]_k$. Il faut alors définir algébriquement une opération sur les polynômes qui coïncide avec la dérivation en analyse.
Comment définir $\Delta : P \mapsto P'$ et quelles sont ses propriétés ?

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

Heuristique - Problème opératoire. Mise en place de la structure

On considère l'ensemble E des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang. Ce sont les suites presque nulles, vues dans le chapitre sur les espaces vectoriels

— $(E,+)$, où $+$ désigne l'addition usuelle des suites, est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+)$ car $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et la différence de deux suites nulles à partir d'un certain rang est une suite nulle à partir d'un certain rang.

— $(E,+,.)$ est alors un s.e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de vecteur nul la suite nulle.

— On définit également le produit de Cauchy de deux éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E par :

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} a_p b_q$$

$\times$ est interne dans E car $\exists N_1 \mid k \geqslant N_1 \Rightarrow a_k = 0$, $\exists N_2 \mid k \geqslant N_2 \Rightarrow b_k = 0$,
d'où pour $n \geqslant N_1 + N_2 - 1, k \in [\![0,n]\!]$, on a $k \geqslant N_1$ ou $n-k \geqslant N_2$ donc $c_n = 0$.

— On vérifie alors que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif :
$\times$ est commutative ;
$\times$ est associative : en posant, pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de E, $(d_n) = (a_n) \times (b_n)$ et $(f_n) = (d_n) \times (c_n)$ on a

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} d_p c_q = \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \Big(\sum_{\substack{(\ell,m)\in\mathbb{N}^2 \\ \ell+m=p}} a_\ell b_m \Big) c_q \\ &= \sum_{\substack{(\ell,m,q)\in\mathbb{N}^3 \\ \ell+m+q=n}} a_\ell b_m c_q \end{aligned}$$

Par commutativité et symétrie du résultat on obtient :

$$(a_n) \times \Big((b_n) \times (c_n)\Big) = \Big((b_n) \times (c_n)\Big) \times (a_n) = (f_n) = \Big((a_n) \times (b_n)\Big) \times (c_n)$$

L'élément neutre est la suite $\epsilon = (1,0,0,\dots)$ définie par $\epsilon_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ \epsilon_n = 0$:
en effet pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, en posant $(c_n) = \epsilon \times (a_n)$ on $c_n = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k a_{n-k} = \epsilon_0 a_n = a_n$.
$\times$ est distributive par rapport à $+$

— De plus pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda.\Big((a_n) \times (b_n)\Big) = \Big(\lambda.(a_n)\Big) \times (b_n) = (a_n) \times \Big(\lambda.(b_n)\Big)$$

On dit que $(E,+,\times,.)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ espace-vectoriel

Définition - Notation de Kronecker

On utilise le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

On a alors $\epsilon = (\delta_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition - Polynôme

On pose $X = (\delta_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$, On vérifierait que $X^p = (\delta_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour aller plus loin - Ensemble $\mathbb{C}$

Cauchy définit l'ensemble des nombres complexes comme l'ensemble quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.
Cela signifie qu'un nombre complexe est un polynôme avec identification $X^2 = -1$.
Ainsi les nombres $(a+ib)\times(c+id)$ *s'identifie aux calculs*

$$(a+bX)\times(c+dX) = ac + X(ad+bc) + bdX^2$$

Mais comme $X^2 = -1$ *on trouve* $(ac-bd) + (ad+bc)X$, *le polynôme identifié à* $(ac-bd)+(ad+bc)i = (a+ib)\times(c+id)$.
En terme de calculs effectués, les calculs de $\mathbb{C}$ *sont bien des calculs de* $\mathbb{R}[X]\dots$

On écrira désormais $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ sous la forme

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où $X^0 = \epsilon$ est identifié à 1.
On identifiera le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda\epsilon = (\lambda, 0, 0, \dots)$ (c'est-à-dire que l'on a une bijection évidente entre $\mathbb{K}$ et les suites nulles à partir du rang 1).
On trouve aussi l'écriture $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où $a_k = 0$ pour $k > n$ (puisqu'il s'agit d'une suite nulle à partir d'un certain rang).
On pourra écrire $[P]_k$ pour désigner a_k, le nombre devant X^k dans P

Définition - Egalité de polynôme
On dit que les polynômes P et Q sont égaux si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $[P]_n = [Q]_n$

Pour aller plus loin - S.e.v des polynômes de degré $\leqslant n$
On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
$\mathbb{K}_n[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie égale à $n+1$.
$(1, X, X^2, \dots, X^n)$ en est une base, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

On a les règles de calcul suivantes, qui donne à $\mathbb{K}[X]$, une structure d'espace vectoriel

Théorème - $\mathbb{K}[X]$, comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de vecteur nul le polynôme 0
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ on a

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0 \text{ si } k > n,\ b_k = 0 \text{ si } k > m)$$

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$$

Remarque - Linéarité de $P \mapsto [P]_k$
On en déduit que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$\left[\lambda P + \mu Q\right]_k = \lambda [P]_k + \mu [Q]_k$.

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

Théorème - Anneau $\mathbb{K}[X]$
On a noté $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif d'élément neutre pour $\times$ le polynôme $1 = X^0$.
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ on a

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0 \text{ si } k > n,\ b_k = 0 \text{ si } k > m)$$

$$P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} a_i b_j$$

Corollaire - Algèbre $\mathbb{K}[X]$
$(\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Attention - $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas une algèbre
Ne cherchez pas à réduire $\mathbb{K}[X]$ de manière à avoir une algèbre de dimension finie. $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable pour la multiplication (sauf si $n \leqslant 1$).

Savoir faire - Expression formelle
Si P et Q sont deux polynômes (de degré fini, évidemment), alors $P+Q$ et $P\times Q$ sont des polynômes et

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\qquad [P+Q]_k=[P]_k+[Q]_k,\qquad [PQ]_k=\sum_{i=0}^{k}[P]_i[Q]_{k-i}=\sum_{i+j=k}[P]_i[Q]_j$$

Cela est indépendant de la valeur de $\deg P$, $\deg Q\ldots$

Pour aller plus loin - Algèbre?
Un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $(A,+,\cdot)$ qui vérifie également : $(A,+,\times)$ est un anneau, s'appelle une $\mathbb{K}$-algèbre.
Par exemple $(\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie (en tant qu'espace vectoriel de dimension finie) si E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie.

Heuristique - Ce qui compte ce sont les relations algébriques
Beaucoup d'objets mathématiques font partis d'un anneau (avec addition et multiplication des éléments).
Il est alors parfois possible de faire une identification entre cette anneau et les relations associés et l'anneau des polynômes avec les mêmes relations.
On se rend compte que la connaissance sur l'anneau polynômes nous éclaire alors autrement. L'exemple suivant éclaire cette remarque. D'une certaine façon l'anneau des polynômes est l'anneau des relations

Exemple - Calculer A^{100} si $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$

Un autre exemple :

Remarque - Formule du binôme
$\mathbb{K}[X]$ étant un anneau commutatif, la formule du binôme est valable pour calculer

$$(P+Q)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}P^iQ^{m-i}$$

Remarque - $\mathbb{K}[X]$ anneau euclidien
Comme $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$ est muni d'une division euclidienne.
Beaucoup de propriétés de l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ se transmettent à l'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$.
C'est l'enjeu du chapitre 19

2.4. Composée

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ (non nul), on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Exemple - Composition

Remarque - Notation

On retrouve aussi la notation $P(X)$ pour P.

Exercice

Exprimer le coefficient $[P \circ Q]_k$ en fonction des $[P]_i$ et $[Q]_j$.

On commencera par $k \leqslant 3\ldots$

Définition - Polynômes pair, impair

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit pair (resp. impair) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

Exercice

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme pair. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X^2)$.

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Heuristique - $\mathbb{K}$: corps ou anneau ?

Pour définir parfaitement $\mathbb{K}[X]$, il faut pouvoir additionner et multiplier les coefficients a_n entre eux.
Pour que ceci se passe bien, il faut fondamentalement que $\mathbb{K}$ soit (au moins) un anneau.
C'est la définition de l'anneau.
Il arrivera que l'on ait besoin, en outre, que chaque élément a_n soit inversible, par exemple pour faire des divisions euclidiennes de polynômes, ou écrire

$$3X \times P = X^3 \Rightarrow P = \frac{1}{3}X^2$$

Donc nous avons souvent besoin d'un corps $\mathbb{K}$.

Remarque - Quel corps $\mathbb{K}$?

La plupart du temps, on prendra pour corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Il arrivera, de temps en temps de prendre $\mathbb{Q}$ (si l'on part de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers), ou moins trivialement : $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ (corps des inversibles modulo p).

Remarque - Quel anneau $\mathbb{K}$?

Enfin, pour certains problèmes (*exemple-type : étude des polynômes à coefficients entiers*), on se placera sur $\mathbb{Z}[X]$.
Pour d'autres problèmes (*exemple-type : lemme de factorisation des matrices), on se placera sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})[X] \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$).

Remarque - $(\mathbb{K}[X])[Y]$

Pour définir l'ensemble des polynômes de deux variables, on exploite aussi l'anneau $\mathbb{K}[X]$, comme base des coefficients de la variable Y.

$$\mathbb{K}[X,Y] = (\mathbb{K}[X])([Y]$$

On en reparlera plus loin...

Pour aller plus loin - Anneau $\mathbb{K}[X,Y]$

Si restreindre à une seule indéterminée est important : c'est la base. Mais, souvent, il peut y avoir deux inconnues ou deux références (comme i dans l'exemple plus haut). On peut par exemple considérer les polynômes en $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$*, on le noterait* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.
Il faut donc nécessaire définir une structure adaptée : $\mathbb{K}[X,Y]$.
La méthode classique est de penser $\mathbb{K}[X,Y] = (\mathbb{K}[X])[Y]$*. C'est-à-dire qu'il s'agit de polynôme en* Y *à coefficients dans les polynômes* X*. On montre que c'est équivalent à faire la construction dans l'autre sens.*
Tout ne se généralise pas de manière évidente : $P = X - Y$ *est un polynôme non nul qui admet une infinité de solution :* $(a,a)\ldots$

3. Degré

3.1. Définition

Définition - Degré d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.
On appelle degré de P, l'entier n que l'on note $\deg P$, c'est aussi

$$\max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.
Les scalaires a_k s'appellent les coefficients du polynôme, a_n s'appelle le coefficient dominant de P.
On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Définition - Polynôme normalisé ou unitaire
Si $[P]_{\deg P} = 1$, P est dit normalisé ou unitaire.

Définition - Polynôme constant
Les polynômes de degré nul ou égal à $-\infty$ sont appelés polynômes constants (et identifiés aux éléments de $\mathbb{K}$).

Savoir faire - Montrer que $\deg P = k$
Par double inégalité :
- $\left(\forall\, i \geqslant k+1,\ [P]_i = 0\right) \Longrightarrow \deg P \leqslant k$
- $\left(\exists\, k \in \mathbb{N},\ [P]_k \neq 0\right) \Longrightarrow \deg P \geqslant k$

Définition - Monôme
λX^k est un monôme.

3.2. Arithmétique des degrés

Proposition - Arithmétique des degrés
Pour tout polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \deg \lambda P = \deg P$$

$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q) \text{ avec égalité si } \deg P \neq \deg Q$$

$$\deg PQ = \deg P + \deg Q$$

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q \qquad ((P,Q) \neq (0,0))$$

Démonstration

Savoir faire - Égalité polynomiale

Par définition, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients.
On procède donc souvent en deux temps :

1. On étudie les degrés
2. On regarde (ensuite) les coefficients

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de 0)
$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Démonstration

Corollaire - Régularité
Soient $(P,Q,R) \in \mathbb{K}[X]^3$, $P \neq 0$. Alors

$$PQ = PR \Rightarrow Q = R.$$

Ce résultat de régularité est vrai même si P n'est pas inversible.

Démonstration

Proposition - Eléments inversibles dans $\mathbb{K}[X]$
Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

Démonstration

3.4. Valuation

Définition - Valuation d'un polynôme
On appelle valuation de P l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.
On pourrait la noter $v_X(P)$.

Exemple - Degré et valuation de $P = 3(X+1)^2 - 3(X-1)$?

Remarque - Elargissement de définition
On retrouve la définition de la valuation p-adique.
Mais ici, on il s'agit de la valuation X-adique

$$v_X(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid X^k | P \text{ et } X^{k+1} \not| P\}$$

Savoir faire - Montrer que $v_X(P) = k$
Par double inégalité :
- $\left(\forall\, i \leqslant k-1,\ [P]_i = 0\right) \Longrightarrow v_X(P) \geqslant k$
- $\left(\exists\, k \in \mathbb{N},\ [P]_k \neq 0\right) \Longrightarrow v_X(P) \leqslant k$

Exercice
Quelle est la valuation de $P \times Q$?

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

Définition - Polynôme dérivé

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On définit le polynôme dérivé de P par

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

Si P est constant, on pose $P' = 0$.

Proposition - Degré et dérivation

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg P \geqslant 1$ alors $\deg P' = (\deg P) - 1$.
Et également pour tout $k \in \mathbb{N}$: $[P']_k = (k+1)[P]_{k+1}$.
En particulier : $[P']_{\deg P - 1} = \deg P \times [P]_{\deg P}$

Pour aller plus loin - Définition algébrique

Cette définition, bien que calquée sur la formule de la dérivation de fonctions polynomiales en analyse, est très différente. En particulier, il n'est jamais question ici de passage à la limite. Et surtout, il s'agit bien d'une définition « globale » : sur la forme et non « locale » : en des points…

Démonstration

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

Théorème - Linéarité de la dérivation

Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ on a :

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$$

$$\left(\sum_{i \in I} \lambda_i P_i \right)' = \sum_{i \in I} \lambda_i P_i'$$

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

$$(P_1 P_2 \dots P_n)' = \sum_{i=1}^{n} P_i' \prod_{j=1, j \neq i}^{n} P_j \text{ et } (P^n)' = n P' P^{n-1}$$

$$(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$$

Démonstration

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

Définition - Dérivées successives
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre k :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall k \geqslant 0,\ P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'.$$

Par récurrence sur k : $\left(P^{(h)}\right)^{(k)} = P^{(h+k)}$, pour tout h

Théorème - Formule de Leibniz
Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On a alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

En fait, on fait la même démonstration que pour le binôme de Newton (récurrence, décalage de somme, triangle de Pascal). On peut aussi exploiter la formule de Taylor et un produit de polynôme puis identifier...

Démonstration

Pour aller plus loin - Formule de Taylor

$[P]_i = \dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}$. *Donc*

$$\frac{(PQ)^{(k)}(0)}{k!} = [PQ]_k = \sum_{i=0}^{k} [P]_i [Q]_{k-i}$$

$$(PQ)^{(k)}(0) = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{P^{(i)}(0) Q^{(k-i)}(0)}{i!(k-i)!}.$$

Ainsi

$$(PQ)^{(k)}(0) = \binom{k}{i} P^{(i)}(0) Q^{(k-i)}(0)$$

Et ceci n'est pas uniquement vrai qu'en 0

4.4. Applications

Cas essentiel centré en a

Le résultat suivant nous servira pour la formule de Taylor

Proposition - Dérivation du monôme
Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$[(X-a)^n]^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Démonstration

Formule générale

Proposition - Dérivation du polynôme P
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$[P^{(k)}]_j = \frac{(j+k)!}{j!}[P]_{j+k}$$

Démonstration

Exercice d'application

Savoir faire - Passer d'une relation entre dérivés de P à une relation entre coefficients

Souvent, on cherche à résoudre une équation différentielle dont l'inconnue est un polynôme P.

1. On précise la notation du degré de P (n)
2. On remplace P, P' par leur expression sommatoire
3. On fait les multiplications prévues dans l'équation (par X, X^2...)
4. On « explose » toutes les sommes, puis on réalise dans chacune le changement de variable de manière à trouver des $\sum_h \alpha_h X^h$.
5. On recolle le tout en une seule somme du type $\sum_{h=a_1}^{a_2} (\alpha_h + \beta_h + \ldots) X^h$.
   Souvent, il y a des conditions de bords. Dans la somme $(\alpha_h + \beta_h + \ldots)$, il ne doit pas y avoir un seul X
6. Par unicité de l'écriture polynomiale, on trouve que pour tout $h \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_h + \beta_h + \cdots = 0$
   (n équations à résoudre. Elles sont souvent récurrence : a_{h-2} en fonction de a_h, par exemple...)

Application - $P'' + P' - \lambda X^2 P = 0$ et $X^2 P'' + P' - \lambda P = 0$

Exercice

On considère la suite de polynômes définie par récurrence par

$$P_0 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, P_{k+1} = (1+X^2)P_k' - (2k+1)XP_k.$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_k.
3. Etudier la parité de P_k.

5. Bilan

Synthèse

⇝ On crée un anneau théoriques des opérations algébriques à partir d'éléments d'un corps $\mathbb{K}$ (à ce stade, on peut se placer sur un anneau $\mathbb{K}$, comme $\mathbb{Z}$ - l'inversion des éléments est important pour la factorisation ou division euclidienne).
C'est un anneau des calculs finis.

⇝ On incarne alors les opérations classiques en leur donnant un sens (que) formel.
Par exemple, la dérivation se formalise sans passer par une question de limite. Tous les résultats tombent alors par simple calcul (sans limite).

⇝ Quelques notions sont importantes : additions, multiplications, compositions et aussi degré ou valuation...

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Expression formelle
— Savoir-faire - Montrer que $\deg P = k$
— Savoir-faire - Egalité polynomiale
— Savoir-faire - Montrer que $v_X(P) = k$
— Savoir-faire - Passer d'une relation entre dérivés de P à une relation entre coefficients

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$[P]_k$	Coefficient d'indice k du polynôme P	$[P+Q]_k = [P]_k + [Q]_k$ et $P \times Q]_k = \sum_{i=0}^{k} [P]_i [P]_{k-i}$	
$\deg P$	Degré de P ou $\deg P = \max\{k \in \mathbb{N} \mid [P]_k \neq 0\}$	$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$, $\deg P \times Q = \deg P + \deg Q$ et $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$	
$P^{(k)}$	Dérivation k-ième de P	$[P^{(k)}]_j = \frac{(j+k)!}{j!} a_{k+j}$	On retrouve les formules classiques de dérivation

Retour sur les problèmes

99. L'anneau des polynômes est comme l'anneau théoriques des calculs algébriques. Quitte à considérer les polynômes à plusieurs variables
100. Tout passe bien, sauf la division. On en reparlera aux chapitres 20 et 21.

101. Dans le cours : $[P+Q]_k = [P]_k + [Q]_k$ et $P \times Q]_k = \sum_{i=0}^{k} [P]_i [P]_{k-i}$.

Plus compliqué $[P \circ Q]_k$.

$$[P \circ Q]_0 = [P]_0 + [P]_1 [Q]_0 + [P]_2 [Q]_0^2 + \dots$$

$$[P \circ Q]_1 = [P]_1 [Q]_1 + 2[P]_2 [Q]_0 [Q]_1 + 3[P]_3 [Q]_0^2 [Q]_1 + \dots$$

Trouver une formule n'est pas facile…

102. Cela existe très bien. On se débrouille sans notion de convergence (une incarnation simple peut être les nombres p-adiques). On note cet ensemble des séries formelles : $\mathbb{K}[[X]]$. Voir sur wikipedia…

103. Cours.