Chapitre 32

Fonctions polynomiales et racines

Résumé -

Au chapitre précédent nous nous sommes centrés sur le développement, l'opération inverse s'appelle la factorisation.
Ce chapitre se concentre autour d'un résultat simple mais essentiel : si $P(a) = 0$, alors P est factorisable par $(X - a)$, déjà entrevu dans le premier chapitre de l'année.
Pour pouvoir écrire cela, il faut d'abord justifier ce que signifie $P(a)$ ou faire $X = a$ (pour $a \in \mathbb{K}$). On définit alors ce qu'est une racine d'un polynôme, une racine d'ordre multiple. On généralise alors les relations de Viète qui lient les coefficients d'un polynôme à ses racines.
Enfin, on se concentre sur le polynôme d'interpolation de Lagrange. Il est la réponse au problème : trouver le polynôme le plus simple (=petit en degré) qui passe par une série de points donnés.
Dans ce chapitre, les résultats d'analyse classique sur $\mathbb{R}$ (théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle...) seront fréquemment mobilisés à cause de la « bijection naturelle » entre l'ensemble des polynômes et l'ensemble des fonctions polynomiales.

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 136 - Egalité de polynômes

Si X est une « variable » qui ne signifie rien, si ce n'est la règle opératoire, que veut dire que deux polynômes sont égaux.
Par exemple X^2-1 et $(X-1)\times(X+1)$ sont-ils égaux? Pourquoi?

? Problème 137 - Egalité de polynômes et racines

Si l'on prolonge le problème précédent, à quelle condition deux polynômes P et Q sont égaux, si ils vérifient

$$P(a_k)=Q(a_k) \qquad \forall\, k\in\mathbb{N}_p$$

Est-ce que cela dépend de p (plus il y a de conditions, plus il y a de « chances » (ou nécessité) que $P=Q$)?
Est-ce que cela dépend du corps $\mathbb{K}$ sur lequel on travaille?
(Exemple : X^p-X s'annule en tous les nombres de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ et pourtant ce n'est pas le polynôme nul...)

? Problème 138 - Expérience et expression polynomiale

On réalise p expériences qui donne en des points $x_1,\dots x_p$ des valeurs $y_1,\dots y_p$ respectivement.
Est-il possible de donner une expression simple (polynomiale, de degré minimal), unique (?) qui lie y_i à x_i, pour tout $i\in\mathbb{N}_p$?

? Problème 139 - Nombre de racines

On a vu en début d'année (pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ou dans un DS (pour $\mathbb{K}=\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$) qu'un polynôme de degré p ne peut admettre plus de p racines. Est-il possible qu'il en admette exactement p, à tous les coups (ce qui donne un théorème simple)?
On sait que $(X-1)^6$ n'admet qu'une racine : 1. Est-il possible d'élargir la notion de racines pour que le théorème précédent soit juste. Ici, il faudrait dire que 1 est 6 fois racines...

? Problème 140 - Construction de $\mathbb{K}[X,Y,Z,\dots]$

On peut rencontrer des opérations polynomiales de plusieurs variables : dans un calcul algébriques, deux nombres peuvent être à étudier en particulier comme variables, les autres étant des paramètres. Avec la formule des « petits Bernoullis » :

$$b^n-a^n=(b-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1}b^k a^{n-1-k}\right)$$

Comment construire les polynômes de plusieurs variables Y^n-X^n?
Est-ce que si $\forall\, P\in\mathbb{K}[X,Y]:\forall\, a\in\mathbb{K}, P(a,a)=0\Longrightarrow P=(X-Y)Q$?

? Problème 141 - Développement de $\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$

Lorsqu'on développe ce polynôme, on trouve une expression du type $P=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.
Quel est le lien entre ces nombres a_i et les x_k ?
Le développement de petite valeur (et le théorème de Viète) donne le sentiment que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, a_i est une fonction polynomiale en les n variables x_i.
Quelle est cette expression? Que se passe-t-il lorsqu'on inverse dans cette expression x_i avec x_j ? On parle de polynôme symétrique.
Réciproquement, est-ce que tout polynôme symétrique en $\{x_k\}$ est une expression (polynomiale?) des a_i ?

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

Définition - Fonctions polynomiales
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{P}: & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \end{array}$$

est appelée fonction polynomiale associée à P.

Remarque - De la fonction polynomiale au polynôme?
L'application $\widetilde{P}$ se conçoit bien, mais la réciproque n'est pas forcément évidente a priori.
Etant donnée une fonction, dont on sait qu'elle est polynomiale, pourquoi pourrait-on lui associé comme antécédent un unique polynôme?
Autrement écrit, a-ton nécessairement $\widetilde{P} = \widetilde{Q} \Longrightarrow P = Q$?

Théorème - Correspondance polynôme et fonction polynomiale
Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\begin{aligned} \widetilde{PQ} &= \widetilde{P}\widetilde{Q} \\ \widetilde{\lambda P} &= \lambda \widetilde{P} \\ \widetilde{P+Q} &= \widetilde{P} + \widetilde{Q} \\ \widetilde{P \circ Q} &= \widetilde{P} \circ \widetilde{Q} \end{aligned}$$

De plus si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\widetilde{P}' = (\widetilde{P'})$.

Démonstration

2.2. Racines d'un polynôme

Définition - Racine
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est racine de P (ou est un zéro de P) si $\widetilde{P}(a) = 0$.

Théorème - Racine et division
Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$.
Alors a est racine de P si et seulement il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)T$.
Dans ce cas on dit que $X-a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Proposition - Factorisation
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, k racines (distinctes) de P.
Alors $\prod_{i=1}^{k}(X-a_i)$ divise P (i.e. il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = T \times \prod_{i=1}^{k}(X-a_i)$.

Démonstration

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

Corollaire - Nombre maximal de racines
Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,
ce qui équivaut à :
Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n+1$

racines est nul.

Démonstration

Corollaire - Critère de nullité d'un polynôme
On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall a \in \mathbb{K}, \widetilde{P}(a) = 0$ alors $P = 0$.

Démonstration

Attention - Cas de corps non fini...
Ce résultat (ainsi que le suivant) se généralise à $\mathbb{K}$ corps infini mais pas au cas où $\mathbb{K}$ est fini.

Corollaire - Bijection $\mathbb{K}[X]$ et fonction polynomiale
L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui à P associe $\widetilde{P}$ est une bijection. On peut donc confondre polynôme et fonction polynomiale et noter $P(a)$ au lieu de $\widetilde{P}(a)$.

Ce corollaire permet de clore la question que nous nous étions posées en début de chapitre.

Démonstration

Corollaire - Egalité de FONCTIONS polynomiales
Deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients.

Démonstration

Exercice
Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ tels que $\widetilde{P}(0) = \widetilde{Q}(0), \widetilde{P}(1) = \widetilde{Q}(1), \widetilde{P}(2) = \widetilde{Q}(2)$. Montrer que $P = Q$.

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

Heuristique - Problème d'interpolation

Pour toute cette partie, on considère : $x_1, \dots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

En fait on cherche P le plus simple possible (= de degré minimal) tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P(x_i) = y_i$.

On appelle un tel problème, un problème d'interpolation. C'est un problème classique en science…

Proposition - Polynômes de Lagrange

Les polynômes définis par

$$L_i = \frac{\prod_{h \neq i} (X - x_h)}{\prod_{h \neq i} (x_i - x_h)}$$

vérifient $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_i(x_j) = \delta_i^j$.

Démonstration

Attention - Dépendance de L_i

Bien que la notation semble faire croire que les L_i ne dépendent que de i (ou x_i…). Il n'en est rien.

Chaque L_i dépend bien de x_i mais aussi totalement de la famille $(x_1, x_2, \dots x_n)$ donc de chaque x_h.

3.2. Interpolation (de Lagrange)

Théorème - Interpolation selon Lagrange (minimal en degré)

Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = y_i.$$

C'est $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.

Démonstration

En prenant $y_i = f(x_i)$, on a le corollaire suivant :

Corollaire - Interpolation aux fonctions
Soient $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $x_1,\dots,x_n$ n points distincts de I, alors il existe un unique polynôme P de degré $n-1$ coïncidant avec f en ces n points (polynôme d'interpolation de Lagrange de f).

Corollaire - Interpolation selon Lagrange (général en degré)
Les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in [\![1,n]\!], Q(x_i) = y_i$ sont les polynômes de la forme $\sum_{i=1}^{n} y_i L_i + T$ où $T \in K[X]$ admet $x_1,\dots,x_n$ pour racines (entre autres).

Démonstration

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynômiale)

Théorème - Formule de Taylor
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Démonstration

***Pour aller plus loin - Problème* LAGRANGE/TAYLOR**
Dans l'interpolation de Lagrange, on cherche P minimal (en degré) tel que

$$\forall\ i \in \mathbb{N}_r, \qquad P(x_i) = y_i$$

Dans l'interpolation de Taylor, on cherche P minimal (en degré) tel que

$$\forall\ i \in \mathbb{N}_r, \qquad P^i(x) = y_i$$

*Il arrive, qu'on rencontre des problèmes d'interpolation mixte entre ces deux problèmes (*HERMITE*...)*

Savoir faire - Division euclidienne et formule de Taylor
La définition de la division euclidienne (et son usage) sera présenté au chapitre suivant... Cet exercice semble un peu trop précoce, mais il est bien en lien avec la formule de Tayor

Exercice
Soient $n > 2$ et $a \in \mathbb{C}$. Déterminer le reste et le quotient dans la division euclidienne de $X^n + 1$ par $(X-a)^3$.

4.2. Multiplicité d'une racine

Définition - Racine de multiplicité m
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est racine de multiplicité m (ou d'ordre (de multiplicité) m) de P si $(X-a)^m$ divise P mais $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.
Par extension, si $P(a) \neq 0$, on dit parfois que a est une racine de multiplicité 0 de P (c'est-à-dire n'est PAS racine de P...).
On note $\mu(a,P)$, l'ordre de multiplicité de a comme racine de P (il peut être nul)

Savoir faire - Exploitation d'une racine d'ordre m
a est racine d'ordre m ssi $P(X) = (X-a)^m Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$

Théorème - Caractérisation des racines multiples
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

Exercice
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$ ait au moins une racine multiple (c'est-à-dire de multiplicité $\geqslant 2$) dans $\mathbb{C}$.

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

Nous allons formaliser des résultats vues en début d'année dans l'art de calculer.

Savoir faire - Corps algébriquement clos
Un corps dont tous les polynômes sont nécessairement scindés est appelé un corps algébriquement clos.
Nous en reparlerons lorsque nous aurons vu le théorème fondamental de l'algèbre

Définition - Polynôme scindé
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ si P s'écrit

$$P = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

où les x_i sont les racines de P dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur multiplicité (c'est-à-dire écrites autant de fois que leur multiplicité) et a_n est le coefficient dominant de P.

Remarque - Corps $\mathbb{K}$
Ce résultat dépend du corps $\mathbb{K}$.

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

Définition - Fonctions symétriques élémentaires
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ tel que $\deg P = n$.
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses racines comptées avec leur multiplicité. On définit

les fonctions symétriques élémentaires des racines :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + \cdots + x_n \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j \\
&\vdots \\
\sigma_k &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\dots x_{i_k} \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1x_2\dots x_n
\end{aligned}$$

Savoir faire - Ecrire ces sommes (de Newton)

σ_k correspond à la somme de tous les possibles en prenant exactement k éléments de $\mathbb{N}_n = \{1,2,\dots n\}$ et en multipliant les nombres x_i indexés par ces k éléments :

$$\sigma_k = \sum_{I_k\subset\binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i\in I_k} x_i$$

Evidemment, même si cela ne se note pas σ_k dépend aussi de n...

Analyse - Relation de récurrence

Pour aller plus loin - Généralisation

Plus fort :

Tout polynôme symétrique de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ s'exprime à l'aide des fonctions symétriques élémentaires σ_k.

Par exemple (exercice !), si on note $S_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$, on a :

1. $S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}S_{p-n} + (-1)^n\sigma_n S_{p-n} = 0$ *pour* $p \geqslant n$
2. $S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}S_1 + (-1)^p\sigma_p \times p = 0$ *pour* $1 \leqslant p \leqslant n-1$

Ce résultat est à la base du théorème de Galois sur les racines des équations polynomiales de degré $\geqslant 5$.

Exercice

Ecrire σ_3 et σ_4 pour $n = 5$

Heuristique - Relation coefficients-racines (par récurrence)

Notons $P_n = \lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)$, on a donc $P_n = (X - x_n)P_{n-1}$.
Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$[P_n]_k = [P_{n-1}]_{k-1} - x_n[P_{n-1}]_k$$

Cette relation ressemble beaucoup à la relation vue plus haut (avec un changement de signe).
Par ailleurs $[P_n]_n = \lambda$ et $\sigma_0 = 1$ (somme vide).
On montre alors par récurrence (sur n et pour tout k) :

$$\sigma_k^n = (-1)^k\frac{[P_n]_{n-k}}{\lambda} = (-1)^k\frac{[P_n]_{n-k}}{[P_n]_n}$$

Théorème - Relations coefficients-racines

On a les relations suivantes entre les coefficients et les racines (**écrites avec leur multiplicité**) du polynôme scindé P :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\quad \sigma_k = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Démonstration

5.3. Applications

Heuristique - Fonctions symétriques générales

Cela permet d'écrire toute expression polynomiale en les racines d'un polynôme, invariante par permutation, en fonction des coefficients du polynôme.
on peut en effet prouver qu'une telle expression s'exprime facilement à l'aide des σ_k.
en particulier $S_k = x_1^k + \cdots x_n^k$ s'exprime à l'aide des coefficients.

Exercice

Déterminer les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} a+b+c & = 1 \\ a^2+b^2+c^2 & = 3 \\ a^3+b^3+c^3 & = 1 \end{cases}$$

Savoir faire - Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode, elle n'est pas unique.
Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.
Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouvé le degré de P,
   si on remplace tous les x_i par X, on obtient un polynôme d'un certain degré n.
   Si ce polynôme possède plusieurs degré, alors on le coupe en addition de polynômes dont les monomes sont tous de même degré.
   Sur notre exemple $n = 4$
2. Connaissant le degré de P, on considère des facteurs à identifier devant le produit des σ_i de degré n.
   Il faut savoir que pour tout i, $\deg(\sigma_i) = i$.
   On a donc sur notre exemple :

   $$P = A\sigma_1^4 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1^2\sigma_2 + D\sigma_1\sigma_3$$

   (3 racines, donc pas de σ_4)

3. Il s'agit ensuite de trouver les valeurs des constantes $A, B, C \ldots$.
On peut prendre des valeurs particulières pour $x_1, x_2 \ldots$.
Par exemple avec
— $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = x$, on a $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ et $\sigma_1 = x$,

$$P = x^4 = Ax^4 \Longrightarrow A = 1$$

— $x_1 = x$, $x_2 = -x$, $x_3 = 0$, on a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -x^2$,

$$P = 2x^4 = Bx^4 \Longrightarrow B = 2$$

— $x_1 = x$, $x_2 = x$, $x_3 = 0$, on a $\sigma_1 = 2x$, $\sigma_2 = x^2$, $\sigma_3 = 0$

$$P = 2x^4 = 1(2x)^4 + 2(x^2)^2 + C(2x)^2 \times (x^2) = (16+2+4C)x^4 \Longrightarrow C = -4$$

— $x_1 = 2x$, $x_2 = -x$, $x_3 = 2x$, on a $\sigma_1 = 3x$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -4x^3$

$$P = 33x^4 = 1(3x)^4 + D(3x) \times (-4x^3) = (81 - 12D)x^4 \Longrightarrow D = 4$$

Donc
$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1^4 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3$$

On peut vérifier les calculs…

Exercice
On note x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - X^2 + 4X + 1$.
Calculer $S = \sum_{i \neq j} x_i^3 x_j$.

Histoire - D'Alembert

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), est un grand mathématicien, flamboyant, du XVIIIème siècle. Il est néanmoins souvent plus connu pour son travail avec Diderot dans la rédaction de la première encyclopédie…
Sa démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss n'a pas résisté aux canons plus exigeants des mathématiciens du XIXième. Il avait montré que toutes racines des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ ne pouvait se trouver que dans $\mathbb{C}$ (pas d'extension de corps possible comme pour passer de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$).
Quelques années plus tard, Gauss apporta une demi-douzaine de démonstrations différentes de ce théorème…

6. Théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème suivant est admis :

Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geqslant 1$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque - Démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss
Bien que ce théorème soit énoncé dans cette partie de cours, toutes les démonstrations connues exploitent quelques résultats de topologie (comme le TVI par exemple).
Une démonstration consiste à considérer $z \mapsto |P(z)|$ et supposer que $\forall\, z$, $|P(z)| > 0$.

1. On se place sur un fermé K, il existe z_0 tel que $\inf_{z \in K} |P(z)| = |P(z_0)| > 0$, d'après Weierstrass.
2. Or autour de z_0 ($z_0 + re^{i\theta}$, r petit, $\theta \in [0, 2\pi[$), il y a toujours un z tel que $P(z) < P(z_0)$…
3. On peut prendre $P'(z_0) \in \mathbb{C}$ qui indique la pente de variation, et $\theta = -\arg(P'(z_0))$….

7. Bilan

Synthèse

⇝ En regardant les valeurs prises (incarnation) par un polynôme (calcul formel) dans un corps, on peut trouver une factorisation (formelle) du polynôme.

⇝ Ces factorisations aident à résoudre le problème d'interpolation qu'on retrouve classiquement en science, grâce au polynôme de Lagrange. Mais aussi le théorème d'interpolation des dérivées (en un même point) avec la formule de Taylor.

⇝ Cette dernière formule permet de définir également l'ordre de multiplicité d'une racine, ce qui permet de conclure totalement la factorisation, même par des puissances de polynômes (racines de P de multiplicité $\geqslant 2$).

⇝ Si les polynômes se factorisent totalement (théorème de D'Alembert-Gauss), alors on doit retrouver dans les coefficients d'un polynôme, les traces de ses racines (par développement). Ce sont les formules de Newton qui s'appuie sur une forme de super-symétrie !

Savoir-faire et Truc & **Astuce du chapitre**

— Savoir-faire - Division euclidienne et formule de Taylor.
— Savoir-faire - Exploitation d'une racine d'ordre m.
— Savoir-faire - Corps algébriquement clos.
— Savoir-faire - Ecrire les sommes (de Newton)
— Savoir-faire - Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\tilde{P}$	Application $\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $x\mapsto P(x)$	$\tilde{P}(a)=0 \iff \exists\, Q$ tq $P=(X-a)Q$	Par abus, on écrit $\tilde{P}=P$
$\mu(a,P)$	(ordre de) multiplicité de a comme racine de P	$\mu(a,P)=k \Leftrightarrow P=(X-a)^k Q$ avec $Q(a)\neq 0$	$k=\min\{h\in\mathbb{N}\mid P^{(h)}(a)\neq 0\}+1$
$L_i(X)=\prod_{j\neq i}\frac{X-x_j}{x_i-x_j}$	Polynômes d'interpolation de LAGRANGE	$L_i(x_j)=\delta_{i,j}$	Il dépend de tous les nombres distincts $x_1,x_2,\dots,x_n$ considérés Il donne une solution particulière au problème d'interpolation. Il faut l'addition aux solutions homogènes.
$T_{a,P}(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$	Expression du développement de Taylor de P	$T_{a,P}=P$	Elle lie la potientielle racines en a à $P^{(k)}(a)$
$\sigma_k=\sum_{I\subset\binom{\mathbb{N}n}{k}}\prod_{i\in I}x_i$	Fonctions symétriques élémentaires de P	$\sigma_k=(-1)^k\frac{[P]_{n-k}}{[P]_n}$ (P scindé)	$x_1,\dots x_n$ sont les racines de P (comptées avec leur multiplicité) La formule se générale à tous les polynômes symétriques en les racines de P

Retour sur les problèmes

104. $P=Q$ si et seulement si $\forall\ k\in\mathbb{N}$, $[P]_k=[Q]_k$.

105. Il suffit qu'il y ait $\max(\deg P,\deg Q)+1$ éléments distincts de $\mathbb{K}$ qui annulent $P-Q$ pour que $P=Q$ en tout élément de $\mathbb{K}$.
Il peut arriver que deux polynômes soient égaux en tout $x\in\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ fini et de petites dimensions), mais les polynômes sont distincts. Ainsi de $X+1$ et X^2+1 sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[X]$…

106. Voir cours. C'est le polynôme de Lagrange+Homogène :

$$\sum_{k=1}^{p} y_k \prod_{i\neq k}\frac{X-x_i}{x_k-x_i}+Q\prod_{i=1}^{p}(X-x_i)$$

107. Voir cours

108. On a vu au chapitre précédent, dans une remarque, on peut définir (par récurrence) :

$$\mathbb{K}[X_1,X_2\dots X_{n+1}]=(\mathbb{K}[X_1,\dots X_n])[X_{n+1}]$$

à condition d'accepter de se restreindre aux polynômes définis sur un anneau et non un corps.
Dans ce cas la factorisation est plus compliquée...
On pourrait par exemple exploiter les petits Bernoullis. On fixe $a \in \mathbb{R}$.

$$P(X,a)-P(a,a) = \sum_{k=1}^{n} a_k(a)(X^k-a^k) = (X-a)\sum_{k=1}^{n} a_k(a)\sum_{i=0}^{k-1} X^i a^{k-1-i} = (X-a)Q_a(X)$$

où donc Q_a est un polynôme. Mieux : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $[Q_a]_k \in \mathbb{K}[a]$, indépendante de a.
On peut identifier, on note : Q_k tel que $\forall\ a \in \mathbb{K}$, $Q_k(a) = [Q_a]_k$.
On obtient ainsi une factorisation de P par $X - Y$.

109. Voir cours.