

Déterminants

Résumé -

Il s'agit d'élargir la définition du déterminant vue pour des matrices d'ordre $n = 2$ à tout ordre n .
 Mais pour cela, nous faisons un détour vers les formes n -linéaires alternés. Il n'y a qu'une possibilité (à un facteur multiplicatif près). Et ainsi, on obtient beaucoup plus qu'une formule généralisée. On trouve une formule explicite et plein de petits trucs intéressants dont :

- la formule polynomiale hyper-symétrique (d'où la référence au groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$)
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- Par blocs : $\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & D \end{pmatrix} = \det A \times \det D$
- une formule explicite (à usage théorique, exclusivement...) du calcul de $A^{-1} \dots$

Sommaire

1. Problèmes	608
2. Applications multilinéaires	609
2.1. Définitions	609
2.2. Expression d'une forme n -linéaire alternée relativement à une base donnée	610
3. Déterminant	611
3.1. Déterminant de n vecteurs	611
3.2. Déterminant d'un endomorphisme	614
3.3. Déterminant d'une matrice	615
3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants	617
4. Calculs et applications des déterminants	618
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système	618
4.2. Déterminant de matrices par blocs	618
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne	618
4.4. Calcul de l'inverse	621
4.5. Déterminant comme fonction polynomiale	622
5. Bilan	623

1. Problèmes

Un seul problème nous motive ici, mais il conduit à divers sous-problème. Existe-t-il une fonction qui pour une matrice donnée indique, par un calcul, si oui ou non, la matrice est inversible?

? Problème 126 - Réflexion selon la dimension

Nous savons qu'une telle fonction existe pour les matrices de taille 2. Il s'agit de

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$\det(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

Par ailleurs, on sait que le rang d'une matrice est égal à la taille de la plus grande sous-matrice inversible.

Est-il possible, de créer par récurrence la fonction $\det_n$ (recherchée) pour une matrice de rang n , connaissant l'expression de $\det_{n-1}$?

? Problème 127 - Réflexion selon la famille des colonnes

A est inversible si et seulement si $(C_1(A), \dots, C_n(A))$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

La fonction $\det(A)$ recherchée doit donc pouvoir être liée à une fonction sur les familles de vecteurs qui indiquent si une telle famille est une base.

$$d(X_1, \dots, X_n) = 0 \implies (X_1, \dots, X_n) \text{ libre/base/générateur de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Que dire de d , si $X_i = 0$ ou si X_j est une combinaison linéaire des autres $(X_k)_{k \neq j}$?

Que dire de d si l'on échange deux vecteurs X_i et X_j ?

? Problème 128 - Signification de la valeur du déterminant

Supposons qu'on ait trouvé $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ tel que $\det(A) = 0$ si et seulement si A non inversible.

Mais alors que dire de A par rapport à A' si $\det(A) = 1$ et $\det(A') = 10$?

? Problème 129 - Multiplicativité de la fonction déterminant.

Supposons qu'on ait trouvé $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ tel que $\det(A) = 0$ si et seulement si A non inversible.

Que peut-on dire de $\det(AB)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\det(B)$?

? Problème 130 - Système de Cramer. Inversion d'une matrice avec le déterminant

On cherche un vecteur X solution du système $AX = b$.

Peut-on trouver exprimer (au moins théoriquement) chaque coordonnée x_i de X en fonction de $\det A$ et de quelque chose d'autre? Quoi? Est-ce un calcul simple?

Et plus largement (mais de manière équivalente), peut-on exprimer (au

moins théoriquement avec un calcul simple) A^{-1} en fonction de A et $\det(A)$? En fonction d'autres nombres?

2. Applications multilinéaires

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1. Définitions

Définition - Application n -linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

On dit que $\Phi : E^n \rightarrow F$ est une application n -linéaire si

$$\begin{aligned} \forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \forall (X, Y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, \lambda X + \mu Y, X_{i+1}, \dots, X_n) \\ = \lambda \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_n) + \mu \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots, X_n) \end{aligned}$$

c'est-à-dire si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Phi_i : X \mapsto \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_n)$ est linéaire.

On note $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'ensemble des applications n -linéaires de E^n dans F .



Histoire - Bourbaki et déterminant.

L'exposition faite ici sur la notion du déterminant suit une forme très moderne de la pensée. Elle remonte à la période de Nicolas Bourbaki. Nous encourageons le lecteur à découvrir qui est Nicolas Bourbaki...

Définition - Forme n -linéaire

Si Φ est une application n -linéaire de E^n dans $\mathbb{K}$,

on dit que Φ est une forme n -linéaire sur E . ($\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_n(E)$)

Définition - Forme n -linéaire symétrique ou antisymétrique

On dit que Φ , forme n -linéaire sur E , est :

— symétrique si

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \quad \Phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \Phi(X_1, \dots, X_n)$$

— antisymétrique si

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \quad \Phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) \Phi(X_1, \dots, X_n)$$

Proposition - Caractérisation et permutation

Φ est symétrique si et seulement si,

lorsque l'on échange deux vecteurs, le résultat est inchangé.

Φ est antisymétrique si et seulement si,

lorsque l'on échange deux vecteurs, le résultat se transforme en son opposé.

Démonstration

Définition - Forme n -linéaire alternée

Une forme n -linéaire Φ sur E est dite alternée si

$$\begin{aligned} \forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, \\ X_i = X_j \Rightarrow \Phi(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n) = 0 \end{aligned}$$

Théorème - Equivalence : alternée et antisymétrique

Soit Φ une forme n -linéaire sur E . Alors on a

$$\Phi \text{ antisymétrique} \iff \Phi \text{ alternée.}$$

Démonstration

2.2. Expression d'une forme n -linéaire alternée relativement à une base donnée

On sait qu'une application linéaire est parfaitement définie par l'image d'une base. Qu'en est-il d'une forme n -linéaire (antisymétrique)?

🔍 **Analyse - Ecriture sur une base pour une forme alternée**

Cette analyse donne la démonstration de la proposition suivante :

Proposition - Écriture selon une base

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension $n \geq 2$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On considère $\Phi \in \mathcal{A}_n(E)$ (forme n -linéaire alternée).

Soit $(X_1, \dots, X_n) \in E^n$. Alors

$$\Phi(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \dots x_{\sigma(n),n} \epsilon(\sigma) \Phi(e_1, \dots, e_n)$$

$$\text{où } \forall j \in \mathbb{N}_n, X_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$$

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

Définition - Déterminant de n vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soient $X_1, \dots, X_n$ n vecteurs de E , $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$.

On appelle déterminant de $(X_1, \dots, X_n)$ dans la base $\mathcal{E}$ le scalaire

$$\det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}.$$

On note

$$\det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

 Remarque - Pour $n = 2$ ou $n = 3$ on a

Comme les permutations de $\{1, 2\}$ sont $\sigma_1 = \text{id}$, de signature égale à 1 et $\sigma_2 = (1, 2)$ de signature égale à -1 , on a

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = +1 x_{1,1} x_{2,2} - 1 x_{2,1} x_{1,2}$$

C'est la formule bien connue.

Comme les permutations de $\{1, 2, 3\}$ sont $\sigma_1 = \text{id}$, $\sigma_2 = (1, 3, 2)$ et $\sigma_3 = (1, 2, 3)$ de signature égale à 1 et $\sigma_4 = (1, 2)$, $\sigma_5 = (1, 3)$ et $\sigma_6 = (2, 3)$ de signature égale à -1 , on a

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = +1 x_{1,1} x_{2,2} x_{3,3} + x_{3,1} x_{1,2} x_{2,3} + x_{2,1} x_{3,2} x_{1,3} - 1 x_{2,1} x_{1,2} x_{3,3} - x_{1,3} x_{2,2} x_{3,1} - x_{1,1} x_{2,3} x_{3,2}$$

C'est la formule moins bien connue.

Théorème - Propriété (essentielle) du déterminant

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}} : E^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_n) &\mapsto \det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

 Histoire - Découverte

La notion de déterminant a été découverte par Leibniz. Il cherchait une méthode (la plus abstraite possible) pour résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues (avec $n \leq 5$). Dans ce cas, la notion de déterminant émerge naturellement. Il a alors démontré toutes les formules qui suivent sauf $\det(A \times B) = \det(A) \det(B)$.

Très étonnement, exactement au même moment, dans le Japon replié sur lui-même, le mathématicien Seki Kowa (1642-1708) faisait des découvertes comparables...

est une forme n -linéaire alternée telle que $\det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Démonstration

Théorème - Structure algébrique de $\mathcal{A}_n(E)$

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Alors l'ensemble $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n -linéaires alternées est une droite vectorielle, engendrée par $\det_{\mathcal{E}}$.

$\det_{\mathcal{E}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée Φ telle que $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$, les autres formes n -linéaires alternées lui sont proportionnelles.

Démonstration

Théorème - Changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ des bases de E . Soit $(X_1, \dots, X_n) \in E^n$. Alors

$$\det_{\mathcal{E}'}(X_1, \dots, X_n) = \det_{\mathcal{E}'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) \quad (*)$$

c'est-à-dire

$$\det_{\mathcal{E}'} = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \times \det_{\mathcal{E}}$$

Démonstration

Théorème - Caractérisation des bases

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n , $\mathcal{E}$ une base de E , $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ une famille de n vecteurs de E . Alors

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) \neq 0$$

Démonstration

✦ Pour aller plus loin - Valeur numérique du déterminant

Il est dommage de réduire l'intérêt du déterminant : sa valeur exacte est une information plus importante (et plus précise) que celui de savoir s'il est nul ou non.

En dimension 2, $\det_{\mathcal{E}}(\vec{u}, \vec{v})$ donne la valeur du double de l'aire du triangle de côté $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On retrouve bien que le déterminant est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.

En dimension 3, il s'agit de la valeur (orientée) du volume élémentaire porté par les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

De manière générale, le déterminant $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$ indique la valeur du « n -volume » élémentaire définie par les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$.

Cela donne un sens à l'inégalité d'Hadamard :

$$\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) \leq \prod_{u \in \mathcal{B}} \|u\|_{2,E}$$

Définition - Orientation d'un espace

Soit $\mathcal{B}_0$ une base donnée de E et $\mathcal{B}$ une autre base. On sait que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \neq 0$.

Les bases de E se classent donc en deux ensembles : celles telles que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$ et celles telles que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$.

On oriente donc E en choisissant une base $\mathcal{B}_0$ de référence qui sera dite

✦ Pour aller plus loin - Avoir même orientation

Il s'agit d'une relation d'équivalence, qui partitionne l'ensemble des bases en deux familles disjointes : les bases directes et les bases indirectes

directe,
 les bases $\mathcal{B}$ telles que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$ sont dites directes,
 les bases $\mathcal{B}$ telles que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ sont dites indirectes.

3.2. Déterminant d'un endomorphisme

Définition - Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Le scalaire $\det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est indépendant de $\mathcal{E}$. On le note $\det(u)$ ou $\det u$ (déterminant de l'endomorphisme u) et

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \det_{\mathcal{E}}(u(X_1), \dots, u(X_n)) = \det(u) \times \det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) \quad (**)$$

Il faut faire une démonstration, bien que ce soit une définition : l'indépendance selon la base

Démonstration

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0$.

Démonstration

Proposition - Premiers résultats

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n . Alors

- $\det Id_E = 1$
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
- $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$
- Si $u \in GL(E)$ alors $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}$

Démonstration**⚠ Attention - Non linéarité**

⚡ $\det(u + v)$ est en général différent de $\det u + \det v$.

⚡ Contre-exemple à avoir en tête :

⚡ $\det(Id_E + Id_E) = \det(2Id_E) = 2^n \neq 1 + 1$ pour $n \geq 2$.

STOP Remarque - Morphisme de groupes

L'application

$$\begin{aligned} \det : (GL(E), \circ) &\rightarrow (\mathbb{K}^*, \times) \\ u &\mapsto \det u \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe; c'est ce que signifie la dernière propriété.

Exercice

Montrer que $\mathcal{SL}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$ est un groupe.

On l'appelle le groupe spécial linéaire.

3.3. Déterminant d'une matrice**Définition - Déterminant d'une matrice**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A (éléments de $\mathbb{K}^n$).

On pose alors

$$\det A = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}, \text{ noté } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

💡 Truc & Astuce pour le calcul - Cas $n = 2$ ou $n = 3$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

(règle de Sarrus).

Théorème - Commutativité de $\det$ et de $u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n , $\mathcal{E}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathcal{M}(u, \mathcal{E})$. Alors

$$\det u = \det A.$$

Démonstration

✦ **Pour aller plus loin - Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$**
 $GL_n(\mathbb{K})$, groupe des matrices inversibles admet comme sous-groupe, le groupe spécial linéaire.

Il s'agit de l'ensemble des matrices de déterminant égal à 1.

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$$

On rappelle qu'une matrice de transvection est de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ (avec $i \neq j$).

On montre alors que

- $\forall i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}, T_{i,j}(\lambda) \in SL_n(\mathbb{K})$.
- Mieux : $\{T_{i,j}(\lambda)\}$ engendre le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ (on exploite au mieux l'algorithme du pivot de Gauss)
- Toute matrice M est de la forme $M = (I_n + (\det M - 1)E_{n,n}) \times S$, avec $S \in SL_n(\mathbb{K})$

Proposition - Premières propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $\det I_n = 1$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- deux matrices semblables ont même déterminant
- $\det({}^t A) = \det A$

Démonstration

Corollaire - Déterminant en lignes

Si $L_1, \dots, L_n$ désignent les lignes de A , alors $\det A$ est le déterminant des vecteurs lignes de A i.e. $\det A = \det({}^t L_1, \dots, {}^t L_n)$.

Démonstration**3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants** **Savoir faire - Liste des bonnes habitudes**

1. On ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un des vecteurs colonnes (resp. lignes) une combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes (resp. lignes).
2. Le déterminant d'une matrice dépend linéairement de chacun des vecteurs colonnes (resp. lignes).
3. Si on effectue une permutation σ sur les vecteurs colonnes (resp. lignes) le déterminant est multiplié par $\epsilon(\sigma)$ (par -1 dans le cas d'un échange de deux colonnes ou deux lignes)
4. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.

 Exemple - Opération sur les colonnes **Exemple - Dépendance linéaire**

On démontre le résultat concernant les matrices diagonales :

DémonstrationExercice

Avec les règles précédentes, montrer que
$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

4. Calculs et applications des déterminants

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

Proposition - Formule de Cramer

Considérons le système $AX = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $[X]_i = \frac{\det(C_1(A) \cdots C_{i-1}(A), b, C_{i+1}(A) \cdots C_n(A))}{\det A}$

Histoire - Redécouverte



C'est le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752) qui remit au goût du jour la notion de déterminant. Les découvertes de Leibniz ayant été (dans un premier temps) oubliées. Ainsi les formules de Cramer (voir plus bas) sont en fait des formules de Leibniz. On doit également à Cramer la définition de la signature d'une permutation.

Démonstration

4.2. Déterminant de matrices par blocs

Proposition - Matrices triangulaires par blocs

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées. Alors on a

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration



Remarque - Transposé

En transposant le résultat précédent, on a donc également : $\det \begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \det B$.

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

En appliquant alors par récurrence le résultat précédent, on obtient la

Proposition - Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

Démonstration

Définition - Mineur et cofacteur

On appelle mineur d'indice (i, j) de A le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

On appelle cofacteur d'indice (i, j) le produit du mineur d'indice (i, j) par $(-1)^{i+j}$.

Théorème - Calcul du déterminant par développement

Soit $1 \leq k \leq n$. Alors, $A_{i,j}$ désignant le cofacteur d'indice (i, j) dans la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{i,k} \quad \text{développement suivant la } k\text{-ième colonne}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{k,j} \quad \text{développement suivant la } k\text{-ième ligne}$$

Démonstration

Exercice

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice

Soit $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (déterminant d'ordre n avec des 1 sur la diagonale, juste au-dessus et juste en-dessous, des 0 autre part).

Déterminer une relation de récurrence entre D_n , D_{n-1} et D_{n-2} , en déduire D_n .

4.4. Calcul de l'inverse

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition - Relation linéaire

$$\forall j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = \delta_{j,k} \det A$$

$$\forall i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \delta_{i,k} \det A$$

Démonstration**Définition - Comatrice**

La matrice $(A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est appelée la comatrice de A et notée $\text{Com}A$.

Théorème - Expression de A^{-1} avec la comatrice

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times {}^t \text{Com}A = {}^t \text{Com}A \times A = (\det A) I_n$.
Donc, si $\det A \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{Com}A$.

Démonstration**✦ Pour aller plus loin - Inverser un système.****Formule de Cramer (autre démonstration)**

Supposons que l'on doit résoudre le système d'inconnue $X : AX = B$.

Il s'agit donc de calculer

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}A \times B$$

On a donc

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n \text{Coef}_{i,j} ({}^t \text{Com}(A)) B_j \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n A_{j,i} B_j \end{aligned}$$

Or ce dernier calcul est le développement par rapport à la colonne i de la matrice A_i^B , obtenu à partir de la matrice A pour laquelle la i^{e} colonne a été remplacée par la colonne B

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) \neq 0$. Déterminer A^{-1} .

 Savoir faire - Utilisation de A^{-1} avec la comatrice

Mis à part pour $n = 2$, on n'utilise **pas** cette formule pour calculer A^{-1} car les calculs sont trop longs. Quelle est leur complexité?

$n! \times n$ pour δ et $(n-1)! \times (n-1)$ pour chacun des n^2 coefficients.

Donc au total : $n!n + n^2(n-1)(n-1)! = nn!(1 + (n-1)) = n^2n! \dots$

4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

 Savoir faire - Si il y a x comme coefficient(s) de A

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \text{Coef}_{i, \sigma(i)}(A).$$

Si x^k se glisse parmi les coefficients de A_x , alors $\det A_x$ est nécessairement une fonction polynomiale en x .

On peut alors :

1. chercher son degré (d), en organisant bien notre réflexion
2. trouver des valeurs particulières pour des valeurs de x particulières et en nombre suffisant ($\geq d$) pour en déduire une expression directe et explicite du déterminant.

On va utiliser cette analyse pour démontrer la proposition suivante (déterminant de Vandermonde)

Proposition - Déterminant de Vandermonde

On note $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice qui suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant cette matrice. Alors

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) | 1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Démonstration



Pour aller plus loin - Polynôme caractéristique d'une matrice

Considère le nombre $\chi(x) = \det(xI_n - A)$.

Alors comme $xI_n - A$ est une matrice avec quelques x comme coefficients, son déterminant est une formule polynomiale en x .

On note χ_A ce polynôme. On montre qu'il est unitaire, de degré n . Il porte quasiment toutes les informations concernant A (mais pas les invariants de similitude...)

Corollaire - Inversibilité de la matrice Vandermonde

$A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Histoire - Vandermonde

Alexandre-Théophile Vandermonde est né le 28 février 1735 à Paris et est mort le 1er janvier 1796 à Paris. Il est un mathématicien et chimiste français

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.

On note $e_k : x \mapsto e^{\lambda_k x}$.

Montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si $\forall i \neq j \leq n, \lambda_i \neq \lambda_j$

5. Bilan

Synthèse

- ↪ L'ensemble des fonctions n -linéaires, alternées de E^n ($\mathbb{K}$ ev) et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
Il est de dimension 1. Toutes ces fonctions sont donc colinéaires, ou proportionnelles à une expression référante (base) : l'application déterminant.
 - ↪ Cette application de base s'appelle le déterminant de la famille des n vecteurs.
Par extension, on peut aussi définir le déterminant d'une matrice (n vecteurs-colonnes de taille n) ou bien d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (par indépendance de cette valeur, selon la base considérée).
 - ↪ On a alors toute une famille de résultats dont deux résultats essentiels : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$ (ou équivalent pour les matrices) et $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$. Les autres résultats sont plus évidents ($\det A = \det A^T \dots$).
 - ↪ Une méthode est souvent exploitée : le développement par rapport à une ligne ou une colonne. Ceci au niveau théorique (on en déduit par exemple : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{com}(A))^T$) ou au niveau pratique (Formules de Cramer, relation de récurrence...).
- On notera également que le déterminant peut être vu comme un polynôme supersymétrique de ces coefficients...

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Truc & Astuce pour le calcul - Cas $n = 2$ ou $n = 3$
- Savoir-faire - Liste des bonnes habitudes
- Savoir-faire - Utilisation de A^{-1} avec la comatrice
- Savoir-faire - Si il y a x comme coefficient(s) de A

Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$\det_E(X_1, \dots, X_n)$	Déterminant de $(X_1, \dots, X_n)$ par rapport à la base E	$\det_E(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n [X]_{i, \sigma(i)}$	où $\forall j \in \mathbb{N}_n, X_j = \sum_{i=1}^n [X]_{i,j} E_i$.
$\det(A)$	Déterminant de $A (\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$	$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \sigma(i) [A]_i$	.
$A_{i,j}$	Cofacteur d'ordre (i, j) de A	$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A^{i \wedge j})$	où $A^{i \wedge j}$ est la matrice obtenue à partir de A privée de la ligne i et colonne j .
$\text{com}A$	Comatrice de $A : \forall i, j \in \mathbb{N}_n, {}^i[\text{com}A]_j = A_{j,i}$ (cofacteur)	$A \times (\text{com}A)^T = I_n$.	
$V(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Déterminant de la matrice de VANDER-MONDE $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$	$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$	

Retour sur les problèmes

142. C'est la formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne. Elle donne la formule $\det_n(A) = \sum_i {}^1[A]_i \times \det_{n-1}(A^{1 \wedge i})$.
Elle se comprend très bien pour des matrices triangulaires supérieures.
143. Cours
144. On voit qu'il y a un agrandissement global de A vers A' d'un facteur 10.
La formule du déterminant précise que celui-ci peut être concentré sur une seule colonne (ou ligne) : $C_i(A') = 10C_i(A)$ et $\forall j \neq i, C_j(A') = C_j(A)$ ou bien dilué sur toutes les colonnes (ou lignes) : $C_k({}^aA) = \sqrt[n]{10} \times C_k(A)$.
145. Cours : nécessairement $\det(AB) = \det A \det B$.
146. Cours : c'est la formule de Cramer ou bien l'inverse d'une matrice