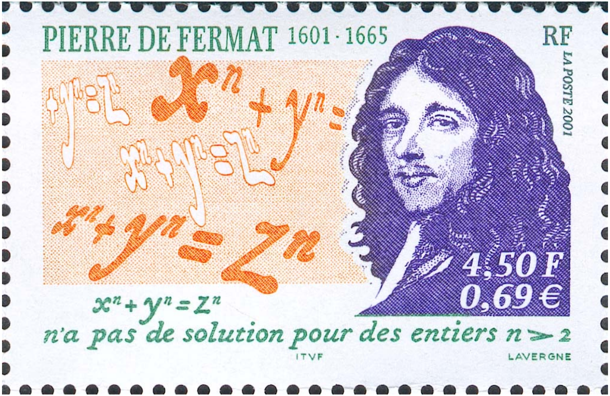

Leçon 75 - Espace vectoriel

21 mars 2025

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

Rang(s)

Définition - Rang d'une application linéaire

Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On dit que u est de rang fini si $\mathrm{Im}\ u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\mathrm{Im}\ u$:

$$\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\ u$$

Rang(s)

Définition - Rang d'une application linéaire

Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On dit que u est de rang fini si $\mathrm{Im}\ u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\mathrm{Im}\ u$:

$$\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\ u$$

Rappels :

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle rang de la famille $(x_1,\dots,x_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_p)$:

$$\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p) = \dim \mathrm{vect}(x_1,\dots,x_p)$$

Rang d'une matrice

Définition - Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ On appelle rang de A (noté $\mathrm{rg}A$) la dimension de $\mathrm{Im}\ A$.

Théorème du rang

Théorème - Théorème du rang

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-e.v. (de dimension quelconque) et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\ u + \dim \mathrm{Im}\ u = \dim \mathrm{Ker}\ u + \mathrm{rg}\, u$$

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

Bilan

On obtient ainsi la caractérisation des automorphismes en dimension finie :

Théorème - Cas des endomorphismes

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a équivalence de
(i) $\operatorname{rg} u = n$
(ii) u est injective
(iii) u est surjective
(iv) u est bijective (donc un automorphisme, soit $u \in GL(E)$)
(v) il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$ (u admet un inverse à gauche)
(vi) il existe $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ w = Id_E$ (u admet un inverse à droite)

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

Majoration du rang d'une composition

Majoration de $\mathrm{rg}(v \circ u)$ en toute généralité

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ avec E et F de dimension finies.
Alors $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}u, \mathrm{rg}v)$.

Majoration du rang d'une composition

Majoration de $\mathrm{rg}(v \circ u)$ en toute généralité

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ avec E et F de dimension finies.
Alors $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}\,u, \mathrm{rg}\,v)$.

Démonstration

Application

Savoir-faire. Exploiter le rang d'endomorphisme restreint ou composé

Pour les inégalités sur les rangs, ou les inclusions $\mathrm{Im}\,/\mathrm{Ker}$ on exploite :

- la composition (cf. démonstration précédente)
- la restriction à A, sev de E : $u_{|A}$.
  On a $u_{|A} : A \to F$, $x \mapsto u(x)$ linéaire et
  $\mathrm{Ker}\ u_{|A} = \mathrm{Ker}\ u \cap A$ et $\mathrm{rg} u_{|A} = \dim A - \dim \mathrm{Ker}\ u \cap A$.

Application

Savoir-faire. Exploiter le rang d'endomorphisme restreint ou composé

Pour les inégalités sur les rangs, ou les inclusions $\mathrm{Im}\,/\mathrm{Ker}\,$ on exploite :

- la composition (cf. démonstration précédente)
- la restriction à A, sev de E : $u_{|A}$.
  On a $u_{|A} : A \to F$, $x \mapsto u(x)$ linéaire et
  $\mathrm{Ker}\, u_{|A} = \mathrm{Ker}\, u \cap A$ et $\mathrm{rg} u_{|A} = \dim A - \dim \mathrm{Ker}\, u \cap A$.

L'exercice suivant est un classique. La fin est importante.

Exercice

<u>Exercice</u>

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension finie. On note pour tout $r \in \mathbb{N}$, $I_r = \mathrm{Im}\ u^r$, $i_r = \dim I_r$, $K_r = \mathrm{Ker}\ u^r$ et $k_r = \dim K_r$.

1. Montrer que $K_r \subset K_{r+1}$ et $I_{r+1} \subset I_r$. Qu'en déduire pour les suite (i_r) et (k_r) ?
2. Montrer que $K_r = K_{r+1}$ ssi $I_r = I_{r+1}$
3. On note $s = \min\{r \mid K_r = K_{r+1}\}$. Montrer que s existe et que pour tout $r \geqslant s$, $K_r = K_s$.
   Montrer que dans ce cas $E = I_s \oplus K_s$.
4. Montrer que pour tout $r \leqslant s+1$, $k_{r+1} - k_r \leqslant k_r - k_{r-1}$.
   On pourra considérer H tel que $K_{r+1} = H \oplus K_r$ et $u_{|H} : H \to K_r$ bijective

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

Coordonnée

Définition - Forme linéaire coordonnée

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E.
On note e_i^* l'unique forme linéaire sur E vérifiant

$$\forall j \in I, e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

On l'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i relative à la base $\mathscr{B}$

Base duale

Autre nom :

Proposition - Base duale

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E.
Alors $\mathscr{B}^* = (e_i^*)_{i \in I}$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$, appelée base duale de $\mathscr{B}$

Base duale

Autre nom :

Proposition - Base duale

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E.
Alors $\mathscr{B}^* = (e_i^*)_{i\in I}$ est une base de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$, appelée base duale de $\mathscr{B}$

On aurait pu exploiter les dimensions, mais pédagogiquement, on montre plus :

Démonstration

Hyperplan et noyau d'une forme linéaire

Proposition - Noyau de forme linéaire et hyperplan

Soit H un sous-espace vectoriel de E. On a équivalence des propriétés :

(1) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$

(2) il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}\ \varphi$

Si ces propriétés sont vérifiées on dit que H est un hyperplan (vectoriel) de E.

Hyperplan et noyau d'une forme linéaire

Proposition - Noyau de forme linéaire et hyperplan

Soit H un sous-espace vectoriel de E. On a équivalence des propriétés :

(1) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$

(2) il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}\ \varphi$

Si ces propriétés sont vérifiées on dit que H est un hyperplan (vectoriel) de E.

Démonstration

Corollaires

D'après la démonstration.

Corollaire - Choix d'un supplémentaire

Si H est un hyperplan de E et si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \mathrm{vect}(a)$.

Corollaires

D'après la démonstration.

Corollaire - Choix d'un supplémentaire

Si H est un hyperplan de E et si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \mathrm{vect}(a)$.

Corollaire - Version forme linéaire

Soit $\varphi \in E^*$. Alors pour tout $x \notin \mathrm{Ker}\ \varphi$, $E = \mathrm{Ker}\ \varphi \oplus \mathrm{vect}(a)$.

Corollaires

D'après la démonstration.

Corollaire - Choix d'un supplémentaire

Si H est un hyperplan de E et si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \mathrm{vect}(a)$.

Corollaire - Version forme linéaire

Soit $\varphi \in E^*$. Alors pour tout $x \notin \mathrm{Ker}\ \varphi$, $E = \mathrm{Ker}\ \varphi \oplus \mathrm{vect}(a)$.

Démonstration

Choix d'un supplémentaire

Proposition - Proportionnalité des formes linéaires

Deux formes linéaires φ et ψ sont proportionnelles si et seulement elles ont le même noyau, c'est-à-dire que pour $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$,

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \mathrm{Ker}\ \psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \,|\, \varphi = \lambda \psi$$

Choix d'un supplémentaire

Proposition - Proportionnalité des formes linéaires

Deux formes linéaires φ et ψ sont proportionnelles si et seulement elles ont le même noyau, c'est-à-dire que pour $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$,

$$\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \,|\, \varphi = \lambda \psi$$

Démonstration

Equation

Définition - Equation d'un (hyper)plan

Soient H un hyperplan et $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ tels que $H = \text{Ker } \varphi$.
Alors l'equation $\varphi(x) = 0$ s'appelle une équation de H.

Equation

Définition - Equation d'un (hyper)plan

Soient H un hyperplan et $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ tels que $H = \mathrm{Ker}\ \varphi$. Alors l'equation $\varphi(x) = 0$ s'appelle une équation de H.

Remarque Infinité d'équations

Cas de dimension finie

Proposition - Cas de la dimension finie

Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie n sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Dans une base $(e_1,\dots,e_n)$ donnée, ce sont les ensembles d'équation

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$$

où $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $(x_1,\dots,x_n)$ étant les coordonnées de $x\in E$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Cas de dimension finie

Proposition - Cas de la dimension finie

Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie n sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Dans une base $(e_1,\dots,e_n)$ donnée, ce sont les ensembles d'équation

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$$

où $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $(x_1,\dots,x_n)$ étant les coordonnées de $x\in E$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Démonstration

Principe

Heuristique. Une équation : un degré perdu

On commence dans un espace vectoriel de dimension n.
A chaque équation, la dimension diminue de une unité.
Les seules exceptions : si une nouvelle équation est une combinaison linéaire des précédentes.
Réciproquement, un sous-espace vectoriel de dimension r dans E de dimension n est le noyau de $n-r$ forme linéaires, ou autrement écrit est obtenu à partir de $n-r$ équations.

Réduction

Proposition - Réduction des dimensions

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \ldots, H_m$ des hyperplans de E. Alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant \dim E - m.$$

Réduction

Proposition - Réduction des dimensions

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \ldots, H_m$ des hyperplans de E. Alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant \dim E - m.$$

On commence par un lemme

Lemme -

Soit φ une forme linéaire définie sur E et F, un sev de E de dimension finie.
Alors $F \cap \mathrm{Ker}\ \varphi$ est de dimension finie et
$p - 1 \leqslant \dim(F \cap \mathrm{Ker}\ \varphi) \leqslant p$.
Précisément : $\dim(F \cap \mathrm{Ker}\ \varphi) = p$ ssi $F \subset \mathrm{Ker}\ \varphi$.

Réduction

Proposition - Réduction des dimensions

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E. Alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant \dim E - m.$$

On commence par un lemme

Lemme -

Soit φ une forme linéaire définie sur E et F, un sev de E de dimension finie.
Alors $F \cap \operatorname{Ker} \varphi$ est de dimension finie et
$p - 1 \leqslant \dim(F \cap \operatorname{Ker} \varphi) \leqslant p$.
Précisément : $\dim(F \cap \operatorname{Ker} \varphi) = p$ ssi $F \subset \operatorname{Ker} \varphi$.

Démonstrations

Plus précisément

Proposition - Expression exacte

Soient E de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$. Alors il existe m hyperplans $H_1, H_2, \dots, H_m$ de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$.

Plus précisément

Proposition - Expression exacte

Soient E de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Alors il existe m hyperplans $H_1, H_2, \dots, H_m$ de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$.

Démonstration

Visions

Corollaire - Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$:

- les hyperplans vectoriels sont les droites vectorielles
- l'intersection de deux droites est de dimension $\geqslant 0$
- le s.e.v. $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, de dimension $0 = 2 - 2$, s'écrit comme intersection de deux droites.

Dans $\mathbb{R}^3$:

- les hyperplans vectoriels sont les plans vectoriels
- l'intersection de deux plans est de dimension $\geqslant 1$
- les droites, de dimension $1 = 3 - 2$, s'écrivent comme intersection de deux plans
- le s.e.v. $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, de dimension $0 = 3 - 3$, s'écrit comme intersection de trois plans.

Dans les deux cas, on retrouve bien les équations usuelles de droites vectorielles dans $\mathbb{R}^2$, de plans vectoriels ou de droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Théorème du rang

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim E$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Théorème du rang

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{rg}(u) + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$.
- Si E ou F est de dimension finie, alors $\operatorname{rg}(u) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.
$$\operatorname{rg} u = \dim E \Longleftrightarrow u \text{ injective}$$
$$\operatorname{rg} u = \dim F \Longleftrightarrow u \text{ surjective}$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim E$.
- Si E ou F est de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.
  $$\mathrm{rg} u = \dim E \iff u \text{ injective}$$
  $$\mathrm{rg} u = \dim F \iff u \text{ surjective}$$
- Si $\dim E = \dim F$, alors
  u bijective $\Leftrightarrow$ u surjective $\Leftrightarrow$ u injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg} u = \dim E$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Théorème du rang

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim E$.
- Si E ou F est de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.
  $$\mathrm{rg} u = \dim E \Longleftrightarrow u \text{ injective}$$
  $$\mathrm{rg} u = \dim F \Longleftrightarrow u \text{ surjective}$$
- Si $\dim E = \dim F$, alors
  u bijective $\Leftrightarrow u$ surjective $\Leftrightarrow u$ injective $\Leftrightarrow \mathrm{rg} u = \dim E$
- Si v est un isomorphisme, v conserve le rang (à droite ou à gauche).

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  5. Rang (et noyau) d'une matrice
- Exercice n° 525

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

- Base de E^* duale de $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$, base de E :
  famille $(e_1^*, \dots e_n^*)$ telle que : $\forall\ i, j \in \mathbb{N}_n,\ e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  5. Rang (et noyau) d'une matrice
- Exercice n° 525

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

- Base de E^* duale de $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$, base de E :
  famille $(e_1^*, \dots e_n^*)$ telle que : $\forall\ i, j \in \mathbb{N}_n,\ e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.
- $H = \text{Ker}\ \varphi$ avec $\varphi \in E^* \Longleftrightarrow \exists\ D$ sev de E de dimension 1 tel que $E = D \oplus H$.
  φ est l'équation de l'hyperplan H

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  5. Rang (et noyau) d'une matrice
- Exercice n° 525

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

- Base de E^* duale de $\mathscr{B}=(e_1,\dots e_n)$, base de E :
  famille $(e_1^*,\dots e_n^*)$ telle que : $\forall\ i,j\in\mathbb{N}_n,\ e_i^*(e_j)=\delta_{i,j}$.
- $H=\text{Ker }\varphi$ avec $\varphi\in E^*\iff\exists\ D$ sev de E de dimension 1 tel que $E=D\oplus H$.
  φ est l'équation de l'hyperplan H
- Si $H_1,\dots H_p$ sont des hyperplans de E, alors $\dim(\bigcap_{i=1}^{p} H_i)\geqslant \dim E-p$

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  5. Rang (et noyau) d'une matrice
- Exercice n° 525