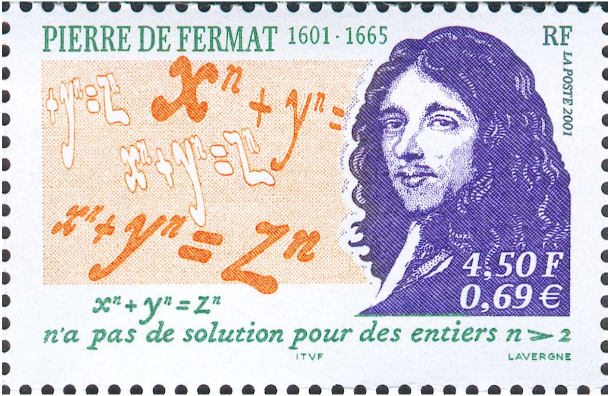


Leçon 76 - Espace vectoriel

25 mars 2025

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
   5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
   5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
   5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
   5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
   5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
   5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
   5.8. Matrices extraites

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice
   5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
   5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
   5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
   5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
   5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
   5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
   5.8. Matrices extraites

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Rappel sur la résolution d'un système linéaire

Proposition - Résolution (théorique) d'un système linéaire

On doit résoudre le système $(S) : AX = b$ d'inconnue X, avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $b \notin \operatorname{Im} A$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$
- Si $b \in \operatorname{Im} A$.

  Alors il existe $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $A \times X_0 = b$.

  $$AX = b \Longleftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Longleftrightarrow X - X_0 \in \operatorname{Ker} A$$

  Alors $\mathscr{S} = X_0 + \operatorname{Ker} A = \{X_0 + Y, Y \in \operatorname{Ker} A\}$ (espace affine).

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Savoir-faire

Savoir faire. Résolution pratique d'un système linéaire

Soit, à résoudre, le système non carrée $AX = b$.

1. On exploite la méthode du pivot de Gauss pour échelonner le système.
   On obtient un système de la forme

$$(E)\left\{\begin{array}{llcl}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & + \cdots + \cdots + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
\quad\ddots & \qquad\vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{r,r+k}x_{r+k} + \cdots + a_{r,p}x_p & = & b_r \\
 & 0 & = & b_{r+1} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & = & b_n
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} r \text{ équations principales} \\
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} n-r \text{ équations auxiliaires}
\end{array}$$

   Dans ce cas r <u>est appelé rang du système</u>.
   Et $x_1, x_2 \dots x_r$ sont appelés <u>les inconnues principales</u> et $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ sont appelés les inconnues auxiliaires ou <u>les variables libres</u>

⇒ Application du théorème du rang matriciel
1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Savoir-faire

Savoir faire. Résolution pratique d'un système linéaire

Soit, à résoudre, le système non carrée $AX = b$.

1.
2. On commente le système échelonné :
   - Combien d'équations principales : c'est le rang de A (voir plus bas)
   - Combien de variables libres ?
   - Quel variable libre choisir ?
   - Exprimer les variables principales en fonction des variables libres
3. Donner la form de l'ensemble des solutions du système sous forme de combinaisons linéaires

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Application

<u>Exercice</u>

Résoudre $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & -1 \\ 2x & +2y & & = & 3 \end{array}\right.$ et

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & -1 \\ 2x & +2y & & = & 1 \end{array}\right.$$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Questionnement ?

Heuristique. Synthèse

On a vu qu'il y a une correspondance (calcul de l'inverse) entre la donnée d'une matrice A et la donnée d'un système $\mathscr{S}$: $AX=0$.
Mais :

- Le $\text{rg}(A)$ est défini à partir des colonnes de A : $\text{rg}(A)=\dim(\text{Im } A)$
- Le $\text{rg}(\mathscr{S})$ est défini à partir des lignes de $\mathscr{S}$ (donc de A) : nombre pivots non nuls lorsqu'on échelonne $\mathscr{S}$

Est-ce toujours la même valeur ? Et si oui, comment le démontrer ? Avec le noyau, ou mieux avec la transformation qui va suivre...

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice
   - 5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
   - 5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
   - 5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
   - 5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
   - 5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
   - 5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
   - 5.8. Matrices extraites

Image comme cl des colonnes

D'après le produit par blocs :

Proposition - Multiplication à droite par une colonne : c.l. des colonnes

Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p)$, une matrice (association de colonnes de taille n).

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, une matrice colonne.

On a alors AX qui est une matrice colonne, plus précisément :

$$AX = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_p C_p,$$

combinaison linéaire des colonnes de A, avec les coefficients-scalaires de X.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
   5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
   5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
   5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
   5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
   5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
   5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
   5.8. Matrices extraites

Image d'une matrice et famille génératrice

⇒ Application du théorème du rang matriciel
1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Définition - Image et rang d'une matrice

Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle image de A, l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\ A &= \mathrm{vect}(C_1, C_2, \dots, C_p) \\ &= \{x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p, x_1, x_2, \dots x_p \in \mathbb{K}\} \\ &= \{A \times X \mid X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}\end{aligned}.$$

Il s'agit du sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (des matrices colonnes) engendré par les p colonnes de A.

On appelle rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, la dimension de $\mathrm{Im}\ A$.

Image d'une matrice

Par définition, $\mathrm{Im}\,A$ (de dimension r) est un s.e.v. de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (de dimension n).
Ils sont égaux, si et seulement si ils ont la même dimension :

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Image d'une matrice

Par définition, $\mathrm{Im}\, A$ (de dimension r) est un s.e.v. de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (de dimension n).
Ils sont égaux, si et seulement si ils ont la même dimension :

Proposition - Famille génératrice, rang d'une matrice

Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Supposons que le rang de A est r.
Alors $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ est génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e.
$\mathrm{Im}\, A = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
si et seulement si $r = n$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Image d'une matrice

Par définition, $\operatorname{Im} A$ (de dimension r) est un s.e.v. de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (de dimension n).
Ils sont égaux, si et seulement si ils ont la même dimension :

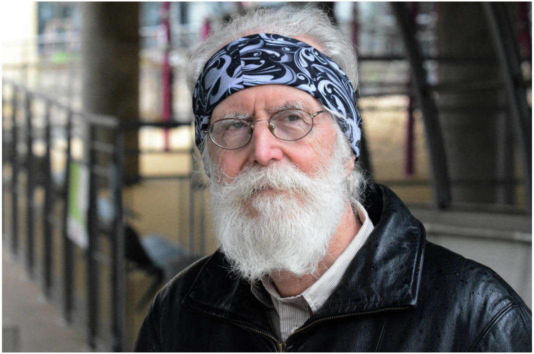
Proposition - Famille génératrice, rang d'une matrice

Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Supposons que le rang de A est r.
Alors $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ est génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e.
$\operatorname{Im} A = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
si et seulement si $r = n$

Remarque Pour les systèmes linéaires

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

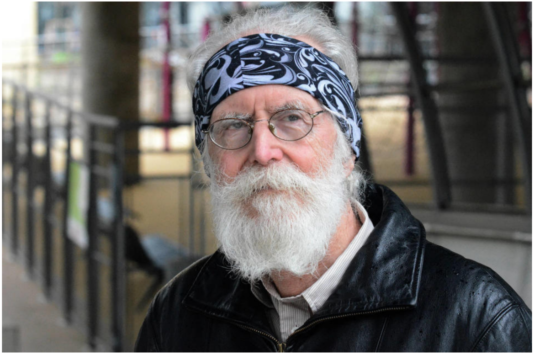
Prix Abel



⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
   - 5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
   - 5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
   - 5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
   - 5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
   - 5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
   - 5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
   - 5.8. Matrices extraites

Prix Abel



distingué « pour ses contributions révolutionnaires à la théorie des probabilités et à l'analyse fonctionnelle » qui ont eu « des applications remarquables en physique mathématique et en statistique » a expliqué l'Académie norvégienne des sciences et des lettres.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

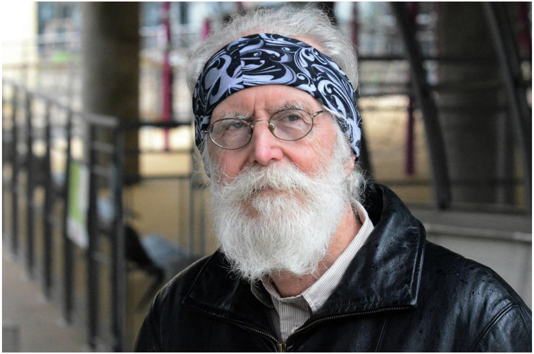
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Prix Abel



« Michel Talagrand s'avère être un mathématicien exceptionnel, doublé d'un redoutable spécialiste dans la résolution de problèmes », a commenté le président du comité du prix Abel, Helge Holden. « Il a grandement contribué à notre compréhension des processus aléatoires et en particulier des processus gaussiens. Ses travaux ont redéfini plusieurs domaines de la théorie des probabilités ».

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

$\Rightarrow$ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

   5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

   5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

   5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

   5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

   5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

   5.7. Action : $(P,Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

   5.8. Matrices extraites

Noyau d'une matrice et famille libre

Analyse Les colonnes de A forment-elles une famille libre ?

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Noyau d'une matrice et famille libre

Analyse Les colonnes de A forment-elles une famille libre ?

Définition - Noyau d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle noyau de A, l'ensemble
$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}.$$
Il s'agit d'un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Noyau d'une matrice et famille libre

Analyse Les colonnes de A forment-elles une famille libre ?

Définition - Noyau d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle noyau de A, l'ensemble

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}.$$

Il s'agit d'un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exercice

Démontrer qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Famille libre et noyau d'une matrice

D'après l'analyse faite quelques lignes plus haut :

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Famille libre et noyau d'une matrice

D'après l'analyse faite quelques lignes plus haut :

Proposition - Famille libre, noyau d'une matrice

Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ssi $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Théorème du rang

Théorème - Théorème du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors : $\dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rg}(A) = p$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Théorème du rang

Théorème - Théorème du rang

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors : $\dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rg}(A) = p$

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Bilan : nouveau critère d'inversibilité (pour une matrice carrée)

Théorème - Noyau de A, image de A et inversibilité

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors, les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

i) A est inversible

ii) $\mathrm{Ker}\ A = \{0\}$

iii) $\mathrm{Im}\ A = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

iv) le rang de A est égal à n

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Espaces du contexte (2)

Attention. Les ensembles du contexte

Il faut bien faire attention qu'ici la matrice carrée de taille $n \times n$ agit sur l'espace des matrices colonnes de taille $n \times 1$.
Ici $p = n$, cela est nécessaire pour espérer que la matrice soit carrée.
On étudie donc alternativement les actions de A sur les deux espaces $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (première partie précédente) et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (sur cette partie)

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Espaces du contexte (2)

Attention. Les ensembles du contexte

Il faut bien faire attention qu'ici la matrice carrée de taille $n \times n$ agit sur l'espace des matrices colonnes de taille $n \times 1$.
Ici $p = n$, cela est nécessaire pour espérer que la matrice soit carrée.
On étudie donc alternativement les actions de A sur les deux espaces $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (première partie précédente) et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (sur cette partie)

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Espaces du contexte (2)

Attention. Les ensembles du contexte

Il faut bien faire attention qu'ici la matrice carrée de taille $n \times n$ agit sur l'espace des matrices colonnes de taille $n \times 1$.
Ici $p = n$, cela est nécessaire pour espérer que la matrice soit carrée.
On étudie donc alternativement les actions de A sur les deux espaces $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (première partie précédente) et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (sur cette partie)

Démonstration

<u>Exercice</u>

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que $A \times B = 0$.
Pourquoi est-il simple de voir (autrement) que A et B ne sont pas inversibles ?
Quelles sont les dimensions des images et noyaux de A et de B ?

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

   5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
   5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
   5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
   5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
   5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
   5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
   5.8. Matrices extraites

Etudier une classe d'équivalence

Heuristique. Précision sur les classes d'équivalence

Lorsque deux matrices sont équivalentes, on dit qu'elles sont dans une même classe d'équivalence.
La bonne habitude consiste alors à décrire cette classe d'équivalence en choisissant un représentant plus ou moins naturel (le plus simple).
(Comme pour l'angle principal $\theta_0 \in [-\pi, \pi[$ représentant de la classe d'équivalence
$\{\theta \mid e^{i\theta} = a, \text{ avec } |a| = 1\} = \{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$).
Pour y arriver, une bonne méthode consiste d'abord à chercher un invariant, c'est-à-dire un objet (mathématique) caractéristique des classes d'équivalence

$$T(A) = T(B) \Longleftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont équivalentes}$$

Cet invariant est le rang de A. Et le représentant sera la matrice $J_r(n,p)$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conservation du rang par produit avec une inversible

Nous avons vu que toute matrice inversible pouvait s'écrire comme produit de matrices élémentaires (transvection, dilatation, transposition) (il suffit d'appliquer l'algorithme de Gauss à son inverse).

Remarque Inversibilité comme un cas particulier. . ..

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Conservation du rang par produit avec une inversible

Nous avons vu que toute matrice inversible pouvait s'écrire comme produit de matrices élémentaires (transvection, dilatation, transposition) (il suffit d'appliquer l'algorithme de Gauss à son inverse).

Remarque Inversibilité comme un cas particulier….

Analyse Reprise de l'algorithme de Gauss

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conservation du rang par produit avec une inversible

Nous avons vu que toute matrice inversible pouvait s'écrire comme produit de matrices élémentaires (transvection, dilatation, transposition) (il suffit d'appliquer l'algorithme de Gauss à son inverse).

Remarque Inversibilité comme un cas particulier. . ..

Analyse Reprise de l'algorithme de Gauss

Proposition - Conservation du rang

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice $U \in GL_n(\mathbb{K})$ (inversible !), alors $\mathrm{rg}(U \times A) = \mathrm{rg}(A)$.

Pour toute matrice $V \in GL_p(\mathbb{K})$ (inversible !), alors $\mathrm{rg}(A \times V) = \mathrm{rg}(A)$.

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conservation du rang par produit avec une inversible

Nous avons vu que toute matrice inversible pouvait s'écrire comme produit de matrices élémentaires (transvection, dilatation, transposition) (il suffit d'appliquer l'algorithme de Gauss à son inverse).

Remarque Inversibilité comme un cas particulier. . ..

Analyse Reprise de l'algorithme de Gauss

Proposition - Conservation du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour toute matrice $U \in GL_n(\mathbb{K})$ (inversible !), alors $\text{rg}(U \times A) = \text{rg}(A)$.
Pour toute matrice $V \in GL_p(\mathbb{K})$ (inversible !), alors $\text{rg}(A \times V) = \text{rg}(A)$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Rang et pivot

Il découle alors de l'algorithme du pivot de Gauss :

Proposition - Rang d'une matrice

Soit A, une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$\mathrm{rg}(A)$ est égal au nombre de pivots (non nul) de toute matrice échelonnée obtenue à partir de l'algorithme de Gauss appliqué à A.
C'est-à-dire, $\mathrm{rg}(A)$ est le nombre de pivots de toute matrice échelonnée équivalente à A

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Rang et pivot

Il découle alors de l'algorithme du pivot de Gauss :

Proposition - Rang d'une matrice

Soit A, une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$\text{rg}(A)$ est égal au nombre de pivots (non nul) de toute matrice échelonnée obtenue à partir de l'algorithme de Gauss appliqué à A.
C'est-à-dire, $\text{rg}(A)$ est le nombre de pivots de toute matrice échelonnée équivalente à A

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Matrices J_r

Définition - Matrice « J_r »

Soient n,p deux entiers et $r \leqslant \min(n,p)$.
On définit $J_r(n,p) = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où

$$\alpha_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \leqslant r \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$J_r(n,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

$O_{p,q}$ étant la matrice nulle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

⇒ Application du théorème du rang matriciel
1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Matrices J_r

Définition - Matrice « J_r »

Soient n, p deux entiers et $r \leqslant \min(n,p)$.
On définit $J_r(n,p) = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où

$$\alpha_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \leqslant r \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$J_r(n,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

$O_{p,q}$ étant la matrice nulle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

En l'absence d'ambiguïté sur la taille de la matrice on la note J_r.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Représentant de la classe d'équivalence

Théorème - Représentant normal

$\text{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, tels que $A = PJ_rQ^{-1}$

si et seulement si A et J_r sont équivalentes.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Représentant de la classe d'équivalence

Théorème - Représentant normal

$\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, tels que $A = PJ_rQ^{-1}$

si et seulement si A et J_r sont équivalentes.

Par transitivité avec J_r :

Corollaire - Invariant

A et B sont équivalentes ssi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Représentant de la classe d'équivalence

Théorème - Représentant normal

$\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, tels que $A = PJ_rQ^{-1}$

si et seulement si A et J_r sont équivalentes.

Par transitivité avec J_r :

Corollaire - Invariant

A et B sont équivalentes ssi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Application à A^T

Proposition - Rang de la A^T

$\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Application à A^T

Proposition - Rang de la A^T

$$\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

⇒ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice
   5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
   5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
   5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
   5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
   5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
   5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
   5.8. Matrices extraites

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Matrices extraites

Définition - Matrice extraites

On appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue en supprimant une ou plusieurs lignes, une ou plusieurs colonnes de A.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Matrices extraites

Définition - Matrice extraites

On appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue en supprimant une ou plusieurs lignes, une ou plusieurs colonnes de A.

Proposition - Extraction est dimintion du rang

Soit B une matrice extraite de A, alors $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Matrices extraites

Définition - Matrice extraites

On appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue en supprimant une ou plusieurs lignes, une ou plusieurs colonnes de A.

Proposition - Extraction est diminition du rang

Soit B une matrice extraite de A, alors $\text{rg}(B) \leqslant \text{rg}(A)$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Voir le rang

On en déduit une méthode pour connaître le rang d'une matrice :

Proposition - Voir le rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $\mathrm{rg} A$ est l'ordre maximum d'une matrice carrée inversible extraite de A.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Voir le rang

On en déduit une méthode pour connaître le rang d'une matrice :

Proposition - Voir le rang d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $\text{rg}A$ est l'ordre maximum d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Voir le rang

On en déduit une méthode pour connaître le rang d'une matrice :

Proposition - Voir le rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $\mathrm{rg} A$ est l'ordre maximum d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Démonstration

Corollaire - Majoration du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\mathrm{rg}\, A \leqslant \min(n,p).$$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Voir le rang

On en déduit une méthode pour connaître le rang d'une matrice :

Proposition - Voir le rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $\mathrm{rg} A$ est l'ordre maximum d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Démonstration

Corollaire - Majoration du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\mathrm{rg} A \leqslant \min(n,p).$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application du théorème du rang matriciel

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
  C'est le cas d'une matrice et de sa transposée.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

⇒ Application du théorème du rang matriciel

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
  C'est le cas d'une matrice et de sa transposée.
- Elles sont toutes les deux équivalentes à une matrice J_r.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application du théorème du rang matriciel

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
  C'est le cas d'une matrice et de sa transposée.
- Elles sont toutes les deux équivalentes à une matrice J_r.
- Si A est une extraction de B, alors $\text{rg}A \leqslant \text{rg}B$.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

⇒ Application du théorème du rang matriciel

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
  C'est le cas d'une matrice et de sa transposée.
- Elles sont toutes les deux équivalentes à une matrice J_r.
- Si A est une extraction de B, alors $\mathrm{rg} A \leqslant \mathrm{rg} B$.
- On peut trouver une matrice carrée d'ordre r (donc inversible) dans une matrice B d'ordre n et de rang r.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang et conséquences

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité

5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.

5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application du théorème du rang matriciel

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites

Conclusion

Objectifs

⇒ Application du théorème du rang matriciel

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 26 : Espaces affines
- Exercice n°526 & 528
- TD jeudi :
  - 8h-10h : 525, 531, 538, 540, 543
  -10h-12h : 531, 532, 539, 541, 542

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture matricielle
4. Théorème du rang et conséquences
5. Rang (et noyau) d'une matrice
5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire
5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
5.3. Image d'une matrice et famille génératrice
5.4. Noyau d'une matrice et famille libre
5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité
5.7. Action : $(P,Q)\cdot M \mapsto P\times M\times Q^{-1}$.
5.8. Matrices extraites