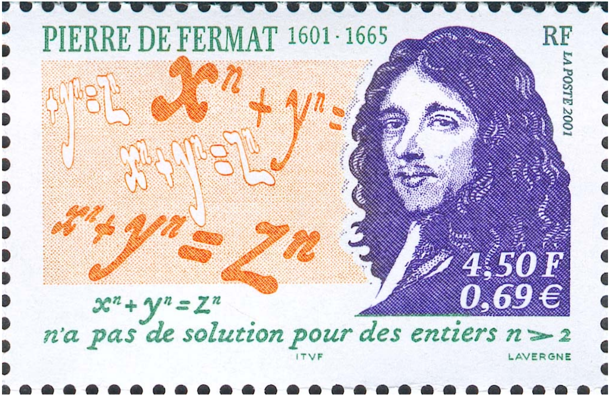

Leçon 78 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

27 mars 2025

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

Problèmes

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problèmes

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problème Lois sur les polynômes

Problèmes

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problème Lois sur les polynômes

Problème Expression algébrique

Problèmes

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problème Lois sur les polynômes

Problème Expression algébrique

Problème Degré infini et séries formelles

Problèmes

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problème Lois sur les polynômes

Problème Expression algébrique

Problème Degré infini et séries formelles

Problème Dérivation algébrique ?

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

Heuristique

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

Heuristique

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

- $(E, +)$, où $+$ désigne l'addition usuelle des suites, est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +)$ car $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et la différence de deux suites nulles à partir d'un certain rang est une suite nulle à partir d'un certain rang.

Heuristique

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

- $(E, +, .)$ est alors un s.e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de vecteur nul la suite nulle.

Heuristique

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

- On définit également le produit de Cauchy de deux éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E par :
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} a_p b_q$
$\times$ est interne dans E car
$\exists N_1 \,|\, k \geqslant N_1 \Rightarrow a_k = 0, \exists N_2 \,|\, k \geqslant N_2 \Rightarrow b_k = 0,$
d'où pour $n \geqslant N_1 + N_2 - 1, k \in [\![0,n]\!]$, on a $k \geqslant N_1$ ou $n - k \geqslant N_2$ donc $c_n = 0$.

Heuristique

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

- On vérifie alors que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif :
  $\times$ est commutative ;
  $\times$ est associative : en posant, pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de E, $(d_n)=(a_n)\times(b_n)$ et $(f_n)=(d_n)\times(c_n)$ on a

$$f_n=\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}} d_p c_q=\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}}\Big(\sum_{\substack{(\ell,m)\in\mathbb{N}^2\\ \ell+m=p}} a_\ell b_m\Big)c_q=\sum_{\substack{(\ell,m,q)\in\mathbb{N}^3\\ \ell+m+q=n}} a_\ell b_m c_q$$

  Par commutativité et symétrie du résultat on obtient :

$$(a_n)\times\Big((b_n)\times(c_n)\Big)=\Big((b_n)\times(c_n)\Big)\times(a_n)=(f_n)=\Big((a_n)\times(b_n)\Big)\times(c_n)$$

  L'élément neutre est $\epsilon=(1,0,0,\dots\quad)$ en effet pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$, en posant $(c_n)=\epsilon\times(a_n)$ on

Heuristique

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang.

- De plus pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda.\Big((a_n)\times(b_n)\Big) = \Big(\lambda.(a_n)\Big)\times(b_n) = (a_n)\times\Big(\lambda.(b_n)\Big)$$

On dit que $(E,+,\times,.)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

L'indéterminée X

Définition - Notation de Kronecker

On utilise le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

On a alors $\epsilon = (\delta_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'indéterminée X

Définition - Polynôme

On pose $X = (\delta_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$, On vérifierait que $X^p = (\delta_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$.
On écrira désormais $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ sous la forme

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où $X^0 = \epsilon$ est identifié à 1.
On identifiera le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda\epsilon = (\lambda, 0, 0, \dots)$ (on a une bijection évidente entre $\mathbb{K}$ et les suites nulles à partir du rang 1).
On trouve aussi l'écriture $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où $a_k = 0$ pour $k > n$ (puisqu'il s'agit d'une suite nulle à partir d'un certain rang).
On pourra écrire $[P]_k$ pour désigner a_k, le nombre devant X^k dans P.

Structures

Définition - Egalité de polynômes

On dit que les polynômes P et Q sont égaux, noté $P = Q$ si $\forall\ n \in \mathbb{N}, [P]_n = [Q]_n$

Structures

Définition - Egalité de polynômes

On dit que les polynômes P et Q sont égaux, noté $P = Q$ si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $[P]_n = [Q]_n$

On a les règles de calcul suivantes, qui donne à $\mathbb{K}[X]$, une structure d'espace vectoriel

Théorème - $\mathbb{K}[X]$, comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de vecteur nul le polynôme 0

Pour $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k, Q = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k X^k$ on a

$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0$ si $k > n$, $b_k = 0$ si $k > m)$

$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$

Structures

Définition - Egalité de polynômes

On dit que les polynômes P et Q sont égaux, noté $P = Q$ si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $[P]_n = [Q]_n$

On a les règles de calcul suivantes, qui donne à $\mathbb{K}[X]$, une structure d'espace vectoriel

Théorème - $\mathbb{K}[X]$, comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de vecteur nul le polynôme 0

Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ on a

$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0$ si $k > n$, $b_k = 0$ si $k > m)$

$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$

Remarque - Linéarité de $P \mapsto [P]_k$.

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

La structure. . .

Théorème - Anneau $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif d'élément neutre pour $\times$ le polynôme $1 = X^0$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ on a

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0 \text{ si } k > n,\ b_k = 0 \text{ si } k > m)$$

$$P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : i+j=k} a_i b_j$$

La structure. . .

Théorème - Anneau $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau commutatif d'élément neutre pour $\times$ le polynôme $1 = X^0$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ on a

$$P+Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)X^k \quad (a_k = 0 \text{ si } k > n,\, b_k = 0 \text{ si } k > m)$$

$$P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : i+j=k} a_i b_j$$

Corollaire - Algèbre $\mathbb{K}[X]$

$(\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot)$ est une algèbre.

La structure...

Théorème - Anneau $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau commutatif d'élément neutre pour $\times$ le polynôme $1=X^0$. Pour $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q=\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ on a

$$P+Q=\sum_{k=0}^{\max(n,m)}(a_k+b_k)X^k \quad (a_k=0 \text{ si } k>n,\ b_k=0 \text{ si } k>m)$$

$$P\times Q=PQ=\sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{avec } c_k=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2:i+j=k} a_i b_j$$

Corollaire - Algèbre $\mathbb{K}[X]$

$(\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot)$ est une algèbre.

Attention. $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas une algèbre

Ne cherchez pas à réduire $\mathbb{K}[X]$ de manière à avoir une algèbre de dimension finie. $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable par multiplication (sauf si $n\leqslant 1$).

Expression formelle

Savoir-faire. Expression formelle

Si P et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $P+Q$ et $P \times Q$ aussi et $\forall\ k \in \mathbb{N}$,
$[P+Q]_k = [P]_k + [Q]_k$,

$$[PQ]_k = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} [P]_i [Q]_j = \sum_{i=0}^{k} [P]_i [Q]_{k-i}$$

Expression formelle

Savoir-faire. Expression formelle

Si P et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $P+Q$ et $P\times Q$ aussi et $\forall\ k\in\mathbb{N}$,
$[P+Q]_k = [P]_k + [Q]_k$,

$$[PQ]_k = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=k}} [P]_i[Q]_j = \sum_{i=0}^{k}[P]_i[Q]_{k-i}$$

Heuristique - Ce qui compte ce sont les relations algébriques

Beaucoup d'objets mathématiques font partis d'un anneau (avec addition et multiplication des éléments).
Il est alors parfois possible de faire une identification entre cette anneau et les relations associés et l'anneau des polynômes avec les mêmes relations.
On se rend compte que la connaissance sur l'anneau polynômes nous éclaire alors autrement. D'une certaine façon *l'anneau des polynômes* est *l'anneau des relations*.

Applications

Exemple Calculer A^{100} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Applications

Exemple Calculer A^{100} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque Formule du binôme

Applications

Exemple Calculer A^{100} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque Formule du binôme

Remarque $\mathbb{K}[X]$ anneau euclidien

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Définition

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Exemple Composition

Définition

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Exemple Composition

Remarque Notation

Définition

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Exemple Composition

Remarque Notation

Exercice

Comment exprimer $[P \circ Q]_k$ en fonction des $([P]_i)$ et $([Q]_j)$?

Application simple

Définition - Polynômes pair, impair

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit pair (resp. impair) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

Application simple

Définition - Polynômes pair, impair

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit pair (resp. impair) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

Exercice

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme pair. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X^2)$.

$\Rightarrow$ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

$\Rightarrow$ Premières règles de calcul

Corps ou anneau ?

Heuristique - $\mathbb{K}$: corps ou anneau ?

Pour définir parfaitement $\mathbb{K}[X]$, il faut pouvoir additionner et multiplier les coefficients a_n entre eux.
Pour que ceci se passe bien, il faut fondamentalement que $\mathbb{K}$ soit (au moins) un anneau.
C'est la définition de l'anneau.
Il arrivera que l'on ait besoin, en outre, que chaque élément a_n soit inversible, par exemple pour faire des divisions euclidiennes de polynômes, ou écrire

$$3X \times P = X^3 \Rightarrow P = \frac{1}{3}X^2$$

Donc nous avons souvent besoin d'un corps $\mathbb{K}$.

Corps ou anneau ?

Remarque Quel corps $\mathbb{K}$?
Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
De temps en temps : $\mathbb{Q}$ (si l'on part de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers), ou moins trivialement : $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ (corps des inversibles modulo p).

Corps ou anneau ?

Remarque Quel corps $\mathbb{K}$?
Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
De temps en temps : $\mathbb{Q}$ (si l'on part de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers), ou moins trivialement : $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ (corps des inversibles modulo p).
Remarque Quel anneau $\mathbb{K}$?
Enfin, pour certains problèmes (*exemple-type : étude des polynômes à coefficients entiers*), on se placera sur $\mathbb{Z}[X]$.
Pour d'autres problèmes (*exemple-type : lemme de factorisation des matrices), on se placera sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})[X] \simeq \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$)

Corps ou anneau ?

Remarque Quel corps $\mathbb{K}$?
Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
De temps en temps : $\mathbb{Q}$ (si l'on part de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers), ou moins trivialement : $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ (corps des inversibles modulo p).
Remarque Quel anneau $\mathbb{K}$?
Enfin, pour certains problèmes (*exemple-type : étude des polynômes à coefficients entiers*), on se placera sur $\mathbb{Z}[X]$.
Pour d'autres problèmes (*exemple-type : lemme de factorisation des matrices), on se placera sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})[X] \simeq \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$)
Remarque $(\mathbb{K}[X])[Y]$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

- Formaliser les opérations classiques de développement. . .

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

- Formaliser les opérations classiques de développement...
- X est une indéterminée, elle représente « TOUT »

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

- Formaliser les opérations classiques de développement. . .
- X est une indéterminée, elle représente « TOUT »
- Degré d'un polynôme : la suite doit être finie !

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

Pour la rentrée

- Lecture du cours : chapitre 23 : Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

  3. Degré & 4. Dérivation
- Exercice n° 650 & 654