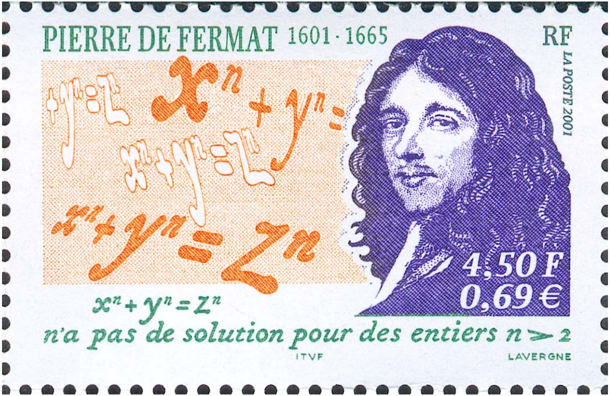


# Leçon 79 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

28 mars 2025



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré
- 3.1. Définition
- 3.2. Arithmétique des degrés
- 3.3. Intégrité et inverses
- 3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme
- 4.1. Définition
- 4.2. Dérivation
- 4.3. Dérivation d'ordre supérieur
- 4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes


1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

- 3.1. Définition
- 3.2. Arithmétique des degrés
- 3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles
- 3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

- 4.1. Définition
- 4.2. Dérivation d'opérations polynomiales
- 4.3. Dérivation d'ordre supérieur
- 4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Définition

Plusieurs définitions

## Définition - Degré d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.
On appelle *degré* de $P$, l'entier $n$ que l'on note $\deg P$, c'est aussi

$$\max\{k \in \mathbb{N} \,|\, a_k \neq 0\}$$

Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.
Les scalaires $a_k$ s'appellent les coefficients du polynôme, $a_n$ s'appelle le *coefficient dominant* de $P$.
On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Définition

## Définition - Polynôme normalisé ou unitaire

Si $[P]_{\deg P} = 1$, $P$ est dit *normalisé* ou *unitaire*.



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Définition

## Définition - Polynôme normalisé ou unitaire

Si $[P]_{\deg P} = 1$, $P$ est dit *normalisé* ou *unitaire*.

## Définition - Polynôme constant

Les polynômes de degré nul ou égal à $-\infty$ sont appelés *polynômes constants* (et identifiés aux éléments de $\mathbb{K}$).




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Définition

## Définition - Polynôme normalisé ou unitaire

Si $[P]_{\deg P} = 1$, $P$ est dit *normalisé* ou *unitaire*.

## Définition - Polynôme constant

Les polynômes de degré nul ou égal à $-\infty$ sont appelés *polynômes constants* (et identifiés aux éléments de $\mathbb{K}$).

## Savoir-faire. Montrer que $\deg P = k$

Par double inégalité :

- $\forall\ i \geqslant k+1, [P]_i = 0 \Longrightarrow \deg P \leqslant k$
- $\exists\ k$ tel que $[P]_k \neq 0 \Longrightarrow \deg P \geqslant k$

⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Définition

## Définition - Polynôme normalisé ou unitaire

Si $[P]_{\deg P} = 1$, $P$ est dit *normalisé* ou *unitaire*.

## Définition - Polynôme constant

Les polynômes de degré nul ou égal à $-\infty$ sont appelés *polynômes constants* (et identifiés aux éléments de $\mathbb{K}$).

## Savoir-faire. Montrer que $\deg P = k$

Par double inégalité :

- $\forall\ i \geqslant k+1, [P]_i = 0 \Longrightarrow \deg P \leqslant k$
- $\exists\ k$ tel que $[P]_k \neq 0 \Longrightarrow \deg P \geqslant k$

## Définition - Monôme

$\lambda X^k$ est un *monôme*.



1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Arithmétique des degrés

## Proposition - Arithmétique des degrés

$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \deg \lambda P = \deg P$

$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$

$\deg PQ = \deg P + \deg Q$

$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q \qquad ((P,Q) \neq (0,0)).$


Leçon 79 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Arithmétique des degrés

## Proposition - Arithmétique des degrés

$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \deg \lambda P = \deg P$

$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$

$\deg PQ = \deg P + \deg Q$

$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q \qquad ((P,Q) \neq (0,0)).$

**Démonstration**




⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Arithmétique des degrés

## Proposition - Arithmétique des degrés

$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \deg \lambda P = \deg P$
$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$
$\deg PQ = \deg P + \deg Q$
$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q \qquad ((P,Q) \neq (0,0))$.

**Démonstration**

## Savoir-faire. Égalité polynomiale

Par définition, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients.
On procède donc souvent en deux temps :

1. On étudie les degrés
2. On regarde (ensuite) les coefficients



⇒ Degré
⇒ Autour de la dérivation de polynômes
1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes


1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

**Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de $0$)**

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

**Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de $0$)**

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

**Démonstration**




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

**Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de 0)**

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

**Démonstration**

**Corollaire - Régularité**

Soient $(P,Q,R) \in \mathbb{K}[X]^3$, $P \neq 0$. Alors

$$PQ = PR \Rightarrow Q = R.$$



1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

**Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de $0$)**

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

**Démonstration**

**Corollaire - Régularité**

Soient $(P,Q,R) \in \mathbb{K}[X]^3$, $P \neq 0$. Alors

$$PQ = PR \Rightarrow Q = R.$$

Vrai même si $P$ n'est pas inversible.




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

**Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de $0$)**

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

**Démonstration**

**Corollaire - Régularité**

Soient $(P,Q,R) \in \mathbb{K}[X]^3$, $P \neq 0$. Alors

$$PQ = PR \Rightarrow Q = R.$$

Vrai même si $P$ n'est pas inversible.

**Démonstration**



⇒ Degré
⇒ Autour de la dérivation de polynômes
1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Le groupe $(\mathbb{K}[X]^*, \times)$

**Proposition - Eléments inversibles dans $\mathbb{K}[X]$**

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.



1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Le groupe $(\mathbb{K}[X]^*, \times)$

**Proposition - Eléments inversibles dans $\mathbb{K}[X]$**

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

**Démonstration**



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré
- 3.1. Définition
- 3.2. Arithmétique des degrés
- 3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles
- 3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme
- 4.1. Définition
- 4.2. Dérivation d'opérations polynomiales
- 4.3. Dérivation d'ordre supérieur
- 4.4. Applications

# Eléments inversibles et valuation

## Définition - Valuation d'un polynôme

On appelle valuation de $P$ l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \,|\, a_k \neq 0\}$.
On peut la noter $v_X(P)$




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Eléments inversibles et valuation

## Définition - Valuation d'un polynôme

On appelle valuation de $P$ l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \,|\, a_k \neq 0\}$.
On peut la noter $v_X(P)$

**Exemple** Degré et valuation de $P = 3(X+1)^2 - 3(X-1)$ ?




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Eléments inversibles et valuation

## Définition - Valuation d'un polynôme

On appelle valuation de $P$ l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.
On peut la noter $v_X(P)$

**Exemple** Degré et valuation de $P = 3(X+1)^2 - 3(X-1)$ ?
**Remarque** Elargissement de définition


Leçon 79 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Eléments inversibles et valuation



⇒ Degré
⇒ Autour de la dérivation de polynômes
1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

## Définition - Valuation d'un polynôme

On appelle valuation de $P$ l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \,|\, a_k \neq 0\}$.
On peut la noter $v_X(P)$

**Exemple** Degré et valuation de $P = 3(X+1)^2 - 3(X-1)$ ?
**Remarque** Elargissement de définition

## Savoir-faire. Montrer que $v_X(P) = k$

Par double inégalité :

- $\forall\ i \leqslant k+1$, $[P]_i = 0 \Longrightarrow v_X(P) \geqslant k$
- $\exists\ k$ tel que $[P]_k \neq 0 \Longrightarrow v_X(P) \leqslant k$

<u>Exercice</u>

Que peut-on dire de $v_X(P \times Q)$ ?

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Définition FORMELLE

## Définition - Polynôme dérivé

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On définit le *polynôme dérivé* de $P$ par

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

Si $P$ est constant, on pose $P' = 0$.



1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Degré et derivation

**Proposition - Degré et dérivation**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg P \geqslant 1$ alors $\deg P' = (\deg P) - 1$.
Et également, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P']_k = (k+1)[P]_{k+1}$.
En particulier, $[P']_{degP-1} = \deg P \times [P]_{\deg P}$.




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Degré et derivation

## Proposition - Degré et dérivation

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg P \geqslant 1$ alors $\deg P' = (\deg P) - 1$.
Et également, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P']_k = (k+1)[P]_{k+1}$.
En particulier, $[P']_{degP-1} = \deg P \times [P]_{\deg P}$.

**Démonstration**


Leçon 79 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes


1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Linéarité

**Théorème - Linéarité de la dérivation**

Pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$ on a :

$$(\lambda P+\mu Q)'=\lambda P'+\mu Q'$$

$$(PQ)'=P'Q+PQ'$$

$$(P_1P_2\dots P_n)'=\sum_{i=1}^{n}P_i'\prod_{j=1,j\neq i}^{n}P_j \text{ et } (P^n)'=nP'P^{n-1}$$

$$(P\circ Q)'=Q'\times P'\circ Q$$




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Linéarité

**Théorème - Linéarité de la dérivation**

Pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$ on a :

$$(\lambda P+\mu Q)'=\lambda P'+\mu Q'$$

$$(PQ)'=P'Q+PQ'$$

$$(P_1P_2\dots P_n)'=\sum_{i=1}^{n}P_i'\prod_{j=1,j\neq i}^{n}P_j \text{ et } (P^n)'=nP'P^{n-1}$$

$$(P\circ Q)'=Q'\times P'\circ Q$$

**Démonstration**




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes


1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Dérivation d'ordre $k$

## Définition - Dérivées successives

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre $k$ :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall k \geqslant 0, P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$$




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré
- 3.1. Définition
- 3.2. Arithmétique des degrés
- 3.3. Intégrité et inverses
- 3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme
- 4.1. Définition
- 4.2. Dérivation
- 4.3. Dérivation d'ordre supérieur
- 4.4. Applications

# Dérivation d'ordre $k$

## Définition - Dérivées successives

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre $k$ :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall k \geqslant 0, P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$$

## Théorème - Formule de Leibniz

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On a alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$


Leçon 79 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3. Degré
   - 3.1. Définition
   - 3.2. Arithmétique des degrés
   - 3.3. Intégrité et inverses
   - 3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
   - 4.1. Définition
   - 4.2. Dérivation
   - 4.3. Dérivation d'ordre supérieur
   - 4.4. Applications

# Dérivation d'ordre $k$

## Définition - Dérivées successives

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre $k$ :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall k \geqslant 0, P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$$

## Théorème - Formule de Leibniz

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On a alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

**Démonstration**

En fait, on fait la même démonstration que pour le binôme de Newton (récurrence, décalage de somme, triangle de Pascal). On peut aussi exploiter la formule de Taylor et un produit de polynôme puis identifier…




1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3. Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Cas essentiel (centré en $a$) !

## Proposition - Dérivation du monôme

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$[(X-a)^n]^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$



⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Cas essentiel (centré en $a$) !

## Proposition - Dérivation du monôme

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$[(X-a)^n]^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

**Démonstration**




⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Formule générale

**Proposition - Dérivation du polynôme $P$**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$[P^{(k)}]_j = \frac{(j+k)!}{j!}[P]_{j+k}$$



1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Formule générale

**Proposition - Dérivation du polynôme $P$**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$[P^{(k)}]_j = \frac{(j+k)!}{j!}[P]_{j+k}$$

**Démonstration**




⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3. Degré
   - 3.1. Définition
   - 3.2. Arithmétique des degrés
   - 3.3. Intégrité et inverses
   - 3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
   - 4.1. Définition
   - 4.2. Dérivation
   - 4.3. Dérivation d'ordre supérieur
   - 4.4. Applications

# Savoir-faire

## Savoir-faire. Passer d'une relation entre dérivées de $P$ à une relation entre coefficients

Souvent, on cherche à résoudre une équation différentielle dont l'inconnue est un polynôme $P$.

1. On précise la notation du degré de $P$ $(n)$
2. On remplace $P$, $P'$ par leur expression sommatoire
3. On fait les multiplications prévues dans l'équation (par $X$, $X^2 \ldots$)
4. On « explose »toutes les sommes, puis on réalise dans chacune le changement de variable de manière à trouver des $\sum_h \alpha_h X^h$.




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Savoir-faire

## Savoir-faire. Passer d'une relation entre dérivées de $P$ à une relation entre coefficients

Souvent, on cherche à résoudre une équation différentielle dont l'inconnue est un polynôme $P$.

5. On recolle le tout en une seule somme du type
   $$\sum_{h=a_1}^{a_2} (\alpha_h + \beta_h + \dots)X^h.$$
   Souvent, il y a des conditions de bords. Dans la somme $(\alpha_h + \beta_h + \dots)$, il ne doit pas y avoir un seul $X$
6. Par unicité de l'écriture polynomiale, on trouve que pour tout $h \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_h + \beta_h + \cdots = 0$
   ($n$ équations à résoudre. Elles sont souvent récurrence : $a_{h-2}$ en fonction de $a_h$, par exemple. . .)



⇒ Degré
⇒ Autour de la dérivation de polynômes
1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Application

**Application** Résoudre $P'' + P' + \lambda X^2 P = 0$ et $X^2 P'' + P' + \lambda P = 0$



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Exercice d'application

**Exercice**

On considère la suite de polynômes définie par récurrence par

$$P_0 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, P_{k+1} = (1 + X^2)P'_k - (2k+1)XP_k.$$

1. Calculer $P_1, P_2, P_3$.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P_k$.
3. Etudier la parité de $P_k$.

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

- Définitions et critères d'encadrement



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

$\Rightarrow$ Degré et valuation d'un polynôme

- Définitions et critères d'encadrement
- Arithmétique des degrés : $\deg(P+Q)$, $\deg(P\times Q)$ et $\deg(P\circ Q)$



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

$\Rightarrow$ Degré et valuation d'un polynôme

- Définitions et critères d'encadrement
- Arithmétique des degrés : $\deg(P+Q)$, $\deg(P\times Q)$ et $\deg(P\circ Q)$
- $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre ! (donc régularité...)




1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

$\Rightarrow$ Degré et valuation d'un polynôme

- Définitions et critères d'encadrement
- Arithmétique des degrés : $\deg(P+Q)$, $\deg(P\times Q)$ et $\deg(P\circ Q)$
- $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre ! (donc régularité...)
- Propriété des valuations


1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Conclusion

## Objectifs

$\Rightarrow$ Degré et valuation d'un polynôme

$\Rightarrow$ Autour de la dérivation de polynômes

- C'est la transformation : $\Delta : P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \longmapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k$



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

- C'est la transformation : $\Delta : P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k$
- Donc : perte d'une unité pour le degré



1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

$\Rightarrow$ Degré et valuation d'un polynôme

$\Rightarrow$ Autour de la dérivation de polynômes

- C'est la transformation : $\Delta : P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k$
- Donc : perte d'une unité pour le degré
- Résultat classique : linéarité, dérivation d'un produit, formule de Leibniz...



1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

- C'est la transformation : $\Delta : P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k$
- Donc : perte d'une unité pour le degré
- Résultat classique : linéarité, dérivation d'un produit, formule de Leibniz...
- A retenir :

$$[(X-a)^n]^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$



1. Problèmes
2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$
3.Degré
3.1. Définition
3.2. Arithmétique des degrés
3.3. Intégrité et inverses
3.4. Valuation
4. Dérivation d'un polynôme
4.1. Définition
4.2. Dérivation
4.3. Dérivation d'ordre supérieur
4.4. Applications

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

**Pour la rentrée**

- Lecture du cours : chapitre 24 : Fonctions polynomiales et racines
- Exercice n° 655 & 656



1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3.Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications