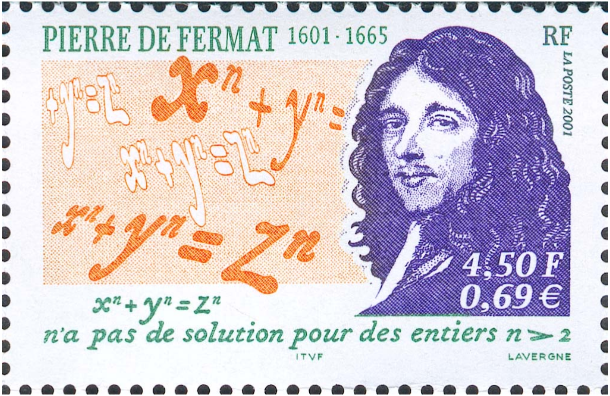

Leçon 80 - Fonctions polynomiales et racines

29 mars 2025

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines
$\Rightarrow$ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe...(interpolations)

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe. . .(interpolations)

Problèmes

Problème Egalité de polynômes

Problèmes

Problème Egalité de polynômes

Problème Egalité de polynômes et racines

Problèmes

Problème Egalité de polynômes

Problème Egalité de polynômes et racines

Problème Expérience et expression polynomiale

Problèmes

Problème Nombre de racines

Problèmes

Problème Nombre de racines

Problème Construction de $\mathbb{K}[X,Y,Z\dots]$

Problèmes

Problème Nombre de racines

Problème Construction de $\mathbb{K}[X,Y,Z\ldots]$

Problème Développement de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines
⇒ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe. . .(interpolations)

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à $\{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, polynomiale$\}$

⇒ Interpol.

De P à $\widetilde{P}$

Définition - Fonctions polynomiales

Soit $P \in \mathbb{K}[X], P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. L'application

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ll} \mathbb{K} & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \end{array}$$

est appelée *fonction polynomiale associée* à P.

De P à $\widetilde{P}$

Définition - Fonctions polynomiales

Soit $P \in \mathbb{K}[X], P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. L'application

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ll} \mathbb{K} & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \end{array}$$

est appelée *fonction polynomiale associée* à P.

Remarque De la fonction polynomiale au polynôme ?

De $\mathbb{K}[X]$ à $\mathbb{K}[x]$

Théorème - Correspondance polynôme et fonction polynomiale

Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$$
$$\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P}$$
$$\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$$
$$\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$$

De plus si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\widetilde{P}' = \widetilde{(P')}$.

De $\mathbb{K}[X]$ à $\mathbb{K}[x]$

Théorème - Correspondance polynôme et fonction polynomiale

Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$$
$$\widetilde{\lambda P} = \lambda\widetilde{P}$$
$$\widetilde{P+Q} = \widetilde{P}+\widetilde{Q}$$
$$\widetilde{P\circ Q} = \widetilde{P}\circ\widetilde{Q}$$

De plus si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on a $\widetilde{P}' = \widetilde{(P')}$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe...(interpolations)

Racine et division

Définition - Racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est *racine* de P (ou est un *zéro* de P) si $\widetilde{P}(a) = 0$.

Racine et division

Définition - Racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est *racine* de P (ou est un *zéro* de P) si $\widetilde{P}(a) = 0$.

Théorème - Racine et division

Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$.
Alors a est racine de P si et seulement il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)T$.
Dans ce cas on dit que $X - a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Racine et division

Définition - Racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$.

On dit que a est *racine* de P (ou est un *zéro* de P) si $\widetilde{P}(a) = 0$.

Théorème - Racine et division

Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$.

Alors a est racine de P si et seulement il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)T$.

Dans ce cas on dit que $X - a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Factorisition

Proposition - Factorisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, k racines (distinctes) de P.

Alors $\prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$ divise P (i.e. il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = T \times \prod_{i=1}^{k}(X - a_i).$$

Factorisition

Proposition - Factorisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, k racines (distinctes) de P.

Alors $\prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$ divise P (i.e. il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$P = T \times \prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe. . .(interpolations)

Une série de corollaires

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,
ce qui équivaut à :
Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n+1$ racines est nul.

Une série de corollaires

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,
ce qui équivaut à :
Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n+1$ racines est nul.

Démonstration

Une série de corollaires

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,
ce qui équivaut à :
Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n+1$ racines est nul.

Démonstration

Corollaire - Critère de nullité d'un polynôme

On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall a \in \mathbb{K}, \widetilde{P}(a) = 0$ alors $P = 0$.

Une série de corollaires

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,
ce qui équivaut à :
Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n+1$ racines est nul.

Démonstration

Corollaire - Critère de nullité d'un polynôme

On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall a \in \mathbb{K}, \widetilde{P}(a) = 0$ alors $P = 0$.

Démonstration

Etrangeté

Attention. Cas de corps non fini...

Ce résultat (ainsi que le suivant) se généralise à $\mathbb{K}$ corps infini mais pas au cas où $\mathbb{K}$ est fini.

De $\widetilde{P}$ à P

Corollaire - Bijection $\mathbb{K}[X]$ et fonction polynomiale

L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui à P associe $\widetilde{P}$ est une bijection. On peut donc confondre polynôme et fonction polynomiale et noter $P(a)$ au lieu de $\widetilde{P}(a)$.

De $\widetilde{P}$ à P

Corollaire - Bijection $\mathbb{K}[X]$ et fonction polynomiale

L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui à P associe $\widetilde{P}$ est une bijection. On peut donc confondre polynôme et fonction polynomiale et noter $P(a)$ au lieu de $\widetilde{P}(a)$.

Ce corollaire permet de clore la question que nous nous étions posées en début de chapitre.

Démonstration

Applications

Corollaire - Egalité de FONCTIONS polynomiales

Deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients.

Applications

Corollaire - Egalité de FONCTIONS polynomiales

Deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients.

Démonstration

Applications

Corollaire - Egalité de FONCTIONS polynomiales

Deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients.

Démonstration

Exercice

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ tels que $\widetilde{P}(0) = \widetilde{Q}(0), \widetilde{P}(1) = \widetilde{Q}(1), \widetilde{P}(2) = \widetilde{Q}(2)$. Montrer que $P = Q$.

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines
$\Rightarrow$ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe. . .(interpolations)

Problème d'interpolation

Heuristique. Problématique d'interpolation

Pour toute cette partie, on considère : $x_1, \dots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.
On cherche P de degré minimal tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P(x_i) = y_i$.
On appelle un tel problème, un problème d'interpolation. C'est un problème classique en science...

Problème d'interpolation

Heuristique. Problématique d'interpolation

Pour toute cette partie, on considère : $x_1,\ldots,x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{K}$.
On cherche P de degré minimal tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P(x_i)=y_i$.
On appelle un tel problème, un problème d'interpolation. C'est un problème classique en science...

Proposition - Polynômes de Lagrange

Les polynômes définis par $L_i = \dfrac{\displaystyle\prod_{h\neq i}(X-x_h)}{\displaystyle\prod_{h\neq i}(x_i-x_h)}$

vérifient $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, L_i(x_j)=\delta_i^j$.

Problème d'interpolation

Heuristique. Problématique d'interpolation

Pour toute cette partie, on considère : $x_1,\ldots,x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{K}$.
On cherche P de degré minimal tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P(x_i) = y_i$.
On appelle un tel problème, un problème d'interpolation. C'est un problème classique en science...

Proposition - Polynômes de Lagrange

Les polynômes définis par $L_i = \dfrac{\prod\limits_{h\neq i}(X - x_h)}{\prod\limits_{h\neq i}(x_i - x_h)}$

vérifient $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, L_i(x_j) = \delta_i^j$.

Démonstration

ATTENTION

Attention. Dépendance de L_i

Bien que la notation semble faire croire que les L_i ne dépendent que de i (ou $x_i \ldots$). Il n'en est rien.
Chaque L_i dépend bien de x_i mais aussi totalement de la famille $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ donc de chaque x_h.

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines
$\Rightarrow$ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe…(interpolations)

Existence et unicité

Théorème - Interpolation selon Lagrange (minimal en degré)

Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = y_i.$$

C'est $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.

Existence et unicité

Théorème - Interpolation selon Lagrange (minimal en degré)

Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = y_i.$$

C'est $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.

Démonstration

Existence et unicité

Théorème - Interpolation selon Lagrange (minimal en degré)

Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = y_i.$$

C'est $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.

Démonstration

En prenant $y_i = f(x_i)$, on a le corollaire suivant :

Corollaire - Interpolation aux fonctions

Soient $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $x_1,\dots,x_n$ n points distincts de I, alors il existe un unique polynôme P de degré $n-1$ coïncidant avec f en ces n points (polynôme d'interpolation de Lagrange de f).

Existence générale

Proposition - Interpolation selon Lagrange (général en degré)

Les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in [\![1,n]\!], Q(x_i) = y_i$ sont les polynômes de la forme $\sum_{i=1}^{n} y_i L_i + T$ où $T \in K[X]$ admet $x_1, \dots, x_n$ pour racines (entre autres).

Existence générale

Proposition - Interpolation selon Lagrange (général en degré)

Les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!], Q(x_i) = y_i$ sont les polynômes de la forme $\sum_{i=1}^{n} y_i L_i + T$ où $T \in K[X]$ admet $x_1, \ldots, x_n$ pour racines (entre autres).

Démonstration

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe. . .(interpolations)

Enoncé

Théorème - Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Enoncé

Théorème - Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Démonstration

Applications

Savoir-faire. Division euclidienne et formule de Taylor

La définition de la division euclidienne (et son usage) sera présenté au chapitre suivant. . .Cet exercice semble un peu trop précoce, mais il est bien en lien avec la formule de Tayor

Applications

Savoir-faire. Division euclidienne et formule de Taylor

La définition de la division euclidienne (et son usage) sera présenté au chapitre suivant...Cet exercice semble un peu trop précoce, mais il est bien en lien avec la formule de Tayor

Exercice

Soient $n > 2$ et $a \in \mathbb{C}$. Déterminer le reste et le quotient dans la division euclidienne de $X^n + 1$ par $(X - a)^3$.

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Trouver le polynôme « le plus simple »qui passe. . .(interpolations)

Définition

Définition - Racine de multiplicité m

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est *racine de multiplicité* m (ou d'ordre (de multiplicité) m) de P si $(X-a)^m$ divise P mais $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.
Par extension, si $P(a) \neq 0$, on dit parfois que a est une racine de multiplicité 0 de P (c'est-à-dire n'est PAS racine de P...).
On note $\mu(a,P)$ l'ordre de multiplicité de a comme racine de P.

Définition

Définition - Racine de multiplicité m

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est *racine de multiplicité* m (ou d'ordre (de multiplicité) m) de P si $(X-a)^m$ divise P mais $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.
Par extension, si $P(a) \neq 0$, on dit parfois que a est une racine de multiplicité 0 de P (c'est-à-dire n'est PAS racine de P...).
On note $\mu(a,P)$ l'ordre de multiplicité de a comme racine de P.

Savoir-faire. Exploitation d'une racine d'ordre m

a est racine d'ordre m ssi $P(X) = (X-a)^m Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$

Caractérisation équivalente

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Caractérisation équivalente

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

Caractérisation équivalente

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

Exercice

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$ ait au moins une racine multiple (c'est-à-dire de multiplicité $\geqslant 2$) dans $\mathbb{C}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Interpolation

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$
- $P(a) = 0$, a est racine de $P \iff \exists\, T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X - a)T = P$

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$
- $P(a) = 0$, a est racine de $P \iff \exists\, T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X-a)T = P$
- Plusieurs racines, plusieurs facteurs !

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$
- $P(a) = 0$, a est racine de $P \iff \exists\, T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X - a)T = P$
- Plusieurs racines, plusieurs facteurs !
- Jamais plus de $n = \deg P$ racines !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$
- $P(a) = 0$, a est racine de $P \iff \exists\, T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X-a)T = P$
- Plusieurs racines, plusieurs facteurs !
- Jamais plus de $n = \deg P$ racines !
- Si P, de degré n a priori a $n+1$ racines distinctes , alors $P = 0$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Interpolation

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Interpolation

- Problème : P tel que $\forall\ i \in \mathbb{N}_n, P(a_i) = b_i$?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Interpolation

- Problème : P tel que $\forall\ i \in \mathbb{N}_n, P(a_i) = b_i$?
- Une unique solution de degré minimal $P = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$

où $\qquad L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Interpolation

- Problème : P tel que $\forall\ i \in \mathbb{N}_n, P(a_i) = b_i$?
- Une unique solution de degré minimal $P = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$

  où $L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$
- De multiples solutions sur $\mathbb{K}[X]$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Interpolation

- Problème : P tel que $\forall\ i \in \mathbb{N}_n, P(a_i) = b_i$?
- Une unique solution de degré minimal $P = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$

  où $\quad L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$
- De multiples solutions sur $\mathbb{K}[X]$.
- Formule de Taylor : pour tout P et tout $a \in \mathbb{K}$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Interpolation

- Problème : P tel que $\forall\ i \in \mathbb{N}_n, P(a_i) = b_i$?
- Une unique solution de degré minimal $P = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$

  où $\quad L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$
- De multiples solutions sur $\mathbb{K}[X]$.
- Formule de Taylor : pour tout P et tout $a \in \mathbb{K}$:
  $$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$
- a est racine d'ordre m de P

  ssi $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$

  ssi $\forall\ i < m, P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Passage de P à $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

$\Rightarrow$ Interpolation

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 19 : Fonctions polynomiales et racines
  4. Formules de Taylor
  5. Relations coefficients racines
- Exercice n° 671 & 674
- TD de jeudi
  8h-10h : 657, 661, 665, 672, 676, 679
  10h-12h : 659, 667, 675, 673, 677, 681