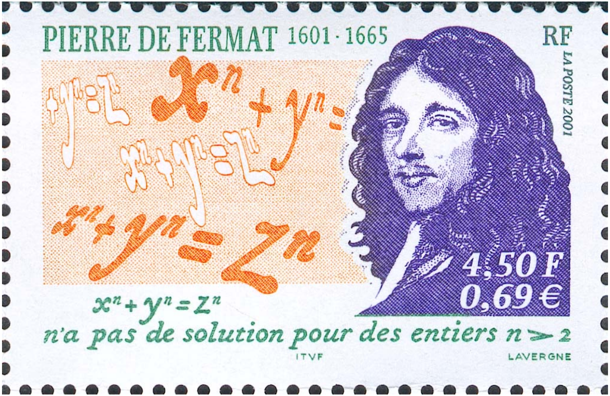

Leçon 81 - Fonctions polynomiales et racines

1er avril 2025

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Rappels

Nous allons formaliser des résultats vues en début d'année dans l'art de calculer.

Savoir-faire. Corps algébriquement clos

Un corps dont tous les polynômes sont nécessairement scindés est appelé un corps algébriquement clos.
Nous en reparlerons lorsque nous aurons vu le théorème fondamental de l'algèbre

Polynôme scindé

Définition - Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ si P s'écrit

$$P = a_n \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$$

où les x_i sont les racines de P dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur multiplicité (c'est-à-dire écrites autant de fois que leur multiplicité) et a_n est le coefficient dominant de P.

Polynôme scindé

Définition - Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ si P s'écrit

$$P = a_n \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$$

où les x_i sont les racines de P dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur multiplicité (c'est-à-dire écrites autant de fois que leur multiplicité) et a_n est le coefficient dominant de P.

Remarque Corps $\mathbb{K}$

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Fonctions symétriques

Définition - Fonctions symétriques élémentaires

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ tel que $\deg P = n$.
Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines comptées avec leur multiplicité.
On définit les fonctions symétriques élémentaires des racines :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + \cdots + x_n \\
\sigma_2 &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \\
\sigma_k &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \dots x_{i_k} \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 x_2 \dots x_n
\end{aligned}$$

Ecrire ces sommes

Savoir-faire. Ecrire ces sommes (de Newton)

σ_k correspond à la somme de tous les possibles en prenant exactement k éléments de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots n\}$ et en multipliant les nombres x_i indexés par ces k éléments (pris une fois) :

$$\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} x_i$$

Evidemment, même si cela ne se note pas, σ_k dépend aussi de n...

Ecrire ces sommes

Savoir-faire. Ecrire ces sommes (de Newton)

σ_k correspond à la somme de tous les possibles en prenant exactement k éléments de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots n\}$ et en multipliant les nombres x_i indexés par ces k éléments (pris une fois) :

$$\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} x_i$$

Evidemment, même si cela ne se note pas, σ_k dépend aussi de n...

Analyse - Relation de récurrence

Ecrire ces sommes

Savoir-faire. Ecrire ces sommes (de Newton)

σ_k correspond à la somme de tous les possibles en prenant exactement k éléments de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots n\}$ et en multipliant les nombres x_i indexés par ces k éléments (pris une fois) :

$$\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} x_i$$

Evidemment, même si cela ne se note pas, σ_k dépend aussi de n...

Analyse - Relation de récurrence

<u>Exercice</u>

Ecrire σ_3 et σ_4 pour $n = 5$

Relations

Heuristique. Relation coefficients-racines (par récurrence)

Notons $P_n = \lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)$, on a donc
$P_n = (X - x_n)P_{n-1}$.
Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P_n]_k = [P_{n-1}]_{k-1} - x_n[P_{n-1}]_k$
Cette relation ressemble beaucoup aux calculs vus plus haut. On montre par récurrence $\sigma_k^n = (-1)^k \dfrac{[P_n]_{n-k}}{[P_n]_n}$

Relations

Heuristique. Relation coefficients-racines (par récurrence)

Notons $P_n = \lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)$, on a donc $P_n = (X - x_n)P_{n-1}$.
Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P_n]_k = [P_{n-1}]_{k-1} - x_n[P_{n-1}]_k$
Cette relation ressemble beaucoup aux calculs vus plus haut. On montre par récurrence $\sigma_k^n = (-1)^k \dfrac{[P_n]_{n-k}}{[P_n]_n}$

Théorème - Relations coefficients-racines

On a les relations suivantes entre les coefficients et les racines (**écrites avec leur multiplicité**) du polynôme scindé P :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Relations

Heuristique. Relation coefficients-racines (par récurrence)

Notons $P_n = \lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)$, on a donc
$P_n = (X - x_n)P_{n-1}$.
Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P_n]_k = [P_{n-1}]_{k-1} - x_n[P_{n-1}]_k$
Cette relation ressemble beaucoup aux calculs vus plus haut. On montre par récurrence $\sigma_k^n = (-1)^k \dfrac{[P_n]_{n-k}}{[P_n]_n}$

Théorème - Relations coefficients-racines

On a les relations suivantes entre les coefficients et les racines (**écrites avec leur multiplicité**) du polynôme scindé P :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Démonstration

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Heuristique

Heuristique - Fonctions symétriques générales

Cela permet d'écrire toute expression polynomiale en les racines d'un polynôme, invariante par permutation, en fonction des coefficients du polynôme.
on peut en effet prouver qu'une telle expression s'exprime facilement à l'aide des σ_k.
en particulier $S_k = x_1^k + \cdots x_n^k$ s'exprime à l'aide des coefficients.

Heuristique

Heuristique - Fonctions symétriques générales

Cela permet d'écrire toute expression polynomiale en les racines d'un polynôme, invariante par permutation, en fonction des coefficients du polynôme.
on peut en effet prouver qu'une telle expression s'exprime facilement à l'aide des σ_k.
en particulier $S_k = x_1^k + \cdots x_n^k$ s'exprime à l'aide des coefficients.

Exercice
Déterminer les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} a+b+c & = 1 \\ a^2+b^2+c^2 & = 3 \\ a^3+b^3+c^3 & = 1 \end{cases}$$

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.
Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.

Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouver le degré de P,

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.
Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouver le degré de P,
2. Connaissant le degré de P, on considère des facteurs à identifier devant le produit des σ_i de degré recherché.
   Donc sur notre exemple : $P = A\sigma_1^4 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1^2\sigma_2 + D\sigma_1\sigma_3$

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.

Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouver le degré de P,
2. Connaissant le degré de P, on considère des facteurs à identifier devant le produit des σ_i de degré recherché. Donc sur notre exemple : $P = A\sigma_1^4 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1^2\sigma_2 + D\sigma_1\sigma_3$
3. Il s'agit ensuite de trouver les valeurs des constantes $A, B, C \dots$.
   On peut prendre des valeurs particulières pour $x_1, x_2 \dots$.
   Par exemple (...)

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.
Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouver le degré de P,
2. Connaissant le degré de P, on considère des facteurs à identifier devant le produit des σ_i de degré recherché.
   Donc sur notre exemple : $P = A\sigma_1^4 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1^2\sigma_2 + D\sigma_1\sigma_3$
3. Il s'agit ensuite de trouver les valeurs des constantes $A, B, C \dots$.
   On peut prendre des valeurs particulières pour $x_1, x_2 \dots$.
   Par exemple (...)
   Donc $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1^4 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3$

Application

Exercice

On note x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - X^2 + 4X + 1$.

Calculer $S = \sum_{i \neq j} x_i^3 x_j$.

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Admis

Le théorème suivant est admis :

Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geqslant 1$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Admis

Le théorème suivant est admis :

Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geqslant 1$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque Démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Polynôme de Taylor et racines multiples

- Interpolation de dérivation

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Polynôme de Taylor et racines multiples

- Interpolation de dérivation
- Formule de Taylor : pour tout P et tout $a \in \mathbb{K}$:
  $$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

- Interpolation de dérivation
- Formule de Taylor : pour tout P et tout $a \in \mathbb{K}$:
  $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$
- a est racine d'ordre m de P
  ssi $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$
  ssi $\forall\ i < m$, $P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{n_i}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{n_i}$
- Si P est scindé, alors $\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} a_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_n}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{n_i}$
- Si P est scindé, alors $\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} a_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_n}$
- Plus généralement, si $T(x_1, \dots x_n)$ est symétrique en les racines de P, alors T s'exprime avec les coefficients de P

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^{k}(X-x_i)^{n_i}$
- Si P est scindé, alors $\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} a_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_n}$
- Plus généralement, si $T(x_1,\dots x_n)$ est symétrique en les racines de P, alors T s'exprime avec les coefficients de P
- Savoir-faire : comment trouver la relation qui lie Σ_k et $(\sigma_h)_h$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{n_i}$
- Si P est scindé, alors $\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} a_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_n}$
- Plus généralement, si $T(x_1, \ldots x_n)$ est symétrique en les racines de P, alors T s'exprime avec les coefficients de P
- Savoir-faire : comment trouver la relation qui lie Σ_k et $(\sigma_h)_h$.
- Théorème fondamental de l'algèbre.

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 20 : Anneau euclidien des polynômes.
- Exercice n° 670& 682