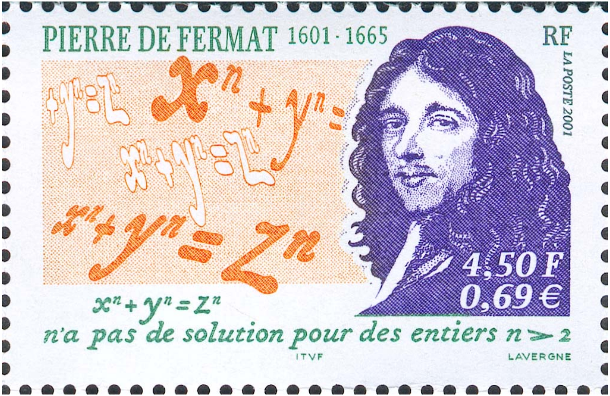

Leçon 77 - Espaces affines

26 mars 2025

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine
⇒ Interprétation des SEL
⇒ Vocabulaire sur les espaces affines
1. Problèmes
2. Introduction
3. Translatés d'un sous-espace vectoriel
3.1. Translation (linéaire)
3.2. (Sous-)Espaces affines
3.3. Exemples variés
4. Systèmes d'équations linéaires
4.1. Contextes
4.2. Interprétations
4.3. Structure de l'ensemble des solutions
5. Equations, intersections et parallélisme
5.1. Cas général
5.2. Dans un plan (espace de dimension 2)

Problèmes

Problème Droite linéaire vs. droite affine.

Problèmes

Problème Droite linéaire vs. droite affine.

Problème Structure affine de l'ensemble des solutions d'un problème linéaire.

Problèmes

Problème Droite linéaire vs. droite affine.

Problème Structure affine de l'ensemble des solutions d'un problème linéaire.

Problème Réciproquement

Problèmes

Problème Droite linéaire vs. droite affine.

Problème Structure affine de l'ensemble des solutions d'un problème linéaire.

Problème Réciproquement

Problème Espaces quotients et supplémentaires.

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

Règles a priori

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Heuristique. Addition (et soustraction) affine

Si $A, B \in E$, on note $\overrightarrow{AB} = B - A \in \vec{E}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B \qquad B = A + \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Règles a priori

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Heuristique. Addition (et soustraction) affine

Si $A, B \in E$, on note $\overrightarrow{AB} = B - A \in \vec{E}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B \qquad B = A + \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Heuristique. Repère affine

On appelle alors *repère affine* de E tout couple $(\Omega, \mathscr{B})$ d'un point Ω de E (l'*origine* du repère) et d'une base $\mathscr{B}$ de $\vec{E}$. Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ alors tout point X de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$X = \Omega + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \,;$$

on dit que les x_i sont les coordonnées du point X dans le repère affine, ce sont également les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega X}$ dans la base $\mathscr{B}$. (Le choix d'une origine permet “d'identifier “ E et $\vec{E}$.)

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

Translation affine

Soit $(E, +, \cdot)$ un K-e.v. A ce stade, a et x sont des vecteurs...

Définition - Translation

Soit $a \in E$. On appelle translation de vecteur a l'application

$$t_a : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x + a \end{array}$$

Translation affine

Soit $(E,+,\cdot)$ un K-e.v. A ce stade, a et x sont des vecteurs…

Définition - Translation

Soit $a \in E$. On appelle translation de vecteur a l'application

$$t_a : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x+a \end{array}$$

Proposition - Le groupe des translations $\mathscr{T}(E)$

On note $\mathscr{T}(E)$ l'ensemble des translations de E. Alors $(\mathscr{T}(E), \circ)$ est un groupe commutatif. En particulier

- Id_E est la translation de vecteur nul.
- $t_a \circ t_b = t_b \circ t_a = t_{a+b}$.
- t_a est bijective de bijection réciproque t_{-a}

Translation affine

Soit $(E, +, \cdot)$ un K-e.v. A ce stade, a et x sont des vecteurs...

Définition - Translation

Soit $a \in E$. On appelle translation de vecteur a l'application

$$t_a : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x + a \end{array}$$

Proposition - Le groupe des translations $\mathscr{T}(E)$

On note $\mathscr{T}(E)$ l'ensemble des translations de E. Alors $(\mathscr{T}(E), \circ)$ est un groupe commutatif. En particulier

- Id_E est la translation de vecteur nul.
- $t_a \circ t_b = t_b \circ t_a = t_{a+b}$.
- t_a est bijective de bijection réciproque t_{-a}

Démonstration

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

1. Problèmes
2. Introduction
3. Translatés d'un sous-espace vectoriel
3.1. Translation (linéaire)
3.2. (Sous-)Espaces affines
3.3. Exemples variés
4. Systèmes d'équations linéaires
4.1. Contextes
4.2. Interprétations
4.3. Structure de l'ensemble des solutions
5. Equations, intersections et parallélisme
5.1. Cas général
5.2. Dans un plan (espace de dimension 2)
5.3. Dans un espace de

Sous-espace affine

Définition - Sous-espace affine (d'un espace vectoriel)

Soit $\mathscr{F} \subset E$ ($\mathscr{F}$ est une partie E).
On dit que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E s'il existe $a \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que

$$\mathscr{F} = t_a(F) = \{x + a\,;\, x \in F\}$$

On note alors $\mathscr{F} = a + F$ et on dit que le s.e.v F est la direction du s.e.a. $\mathscr{F}$.

Sous-espace affine

Définition - Sous-espace affine (d'un espace vectoriel)

Soit $\mathscr{F} \subset E$ ($\mathscr{F}$ est une partie E).
On dit que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E s'il existe $a \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que

$$\mathscr{F} = t_a(F) = \{x + a\,;\, x \in F\}$$

On note alors $\mathscr{F} = a + F$ et on dit que le s.e.v F est la direction du s.e.a. $\mathscr{F}$.

Remarque Eléments de $\mathscr{F}$

Sous-espace affine

Définition - Sous-espace affine (d'un espace vectoriel)

Soit $\mathscr{F} \subset E$ ($\mathscr{F}$ est une partie E).
On dit que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E s'il existe $a \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que

$$\mathscr{F} = t_a(F) = \{x + a\,;\, x \in F\}$$

On note alors $\mathscr{F} = a + F$ et on dit que le s.e.v F est la direction du s.e.a. $\mathscr{F}$.

Remarque Eléments de $\mathscr{F}$
Remarque Autre notation

Sous-espace affine

Définition - Sous-espace affine (d'un espace vectoriel)

Soit $\mathscr{F} \subset E$ ($\mathscr{F}$ est une partie E).
On dit que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E s'il existe $a \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que

$$\mathscr{F} = t_a(F) = \{x + a\,;\, x \in F\}$$

On note alors $\mathscr{F} = a + F$ et on dit que le s.e.v F est la direction du s.e.a. $\mathscr{F}$.

Remarque Eléments de $\mathscr{F}$
Remarque Autre notation
Remarque Unicité de $\mathscr{F}$

Sous-espace affine

Définition - Sous-espace affine (d'un espace vectoriel)

Soit $\mathscr{F} \subset E$ ($\mathscr{F}$ est une partie E).
On dit que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E s'il existe $a \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que

$$\mathscr{F} = t_a(F) = \{x + a\,;\, x \in F\}$$

On note alors $\mathscr{F} = a + F$ et on dit que le s.e.v F est la direction du s.e.a. $\mathscr{F}$.

Remarque Eléments de $\mathscr{F}$
Remarque Autre notation
Remarque Unicité de $\mathscr{F}$
Démonstration

Cas particuliers et exemples

Définition - Sea particuliers

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. On dit que $\mathscr{F}$ est

- un point (ou un singleton réduit à un point) si $F = \{0_E\}$,
- une droite affine si F est une droite vectorielle,
- un plan affine si F est un plan vectoriel,
- un hyperlan affine si F est un hyperplan vectoriel.

Cas particuliers et exemples

Définition - Sea particuliers

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. On dit que $\mathscr{F}$ est

- un point (ou un singleton réduit à un point) si $F = \{0_E\}$,
- une droite affine si F est une droite vectorielle,
- un plan affine si F est un plan vectoriel,
- un hyperlan affine si F est un hyperplan vectoriel.

Application Représentation graphique dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$

Exemples

Exemple Cas particuliers

Exemples

Exemple Cas particuliers

• les s.e.a de $\mathbb{R}^2$ sont

• les s.e.a de $\mathbb{R}^3$ sont

• $\{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, y'' + y' - 2y = e^{3x}\}$ est un s.e.a de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de direction

Expression

Proposition - Expression d'un s.e.a.

Si $\mathscr{F}$ est un s.e.a de E de direction F,
alors pour tout $a \in \mathscr{F}$ on a $\mathscr{F} = a + F$.

Expression

Proposition - Expression d'un s.e.a.

Si $\mathscr{F}$ est un s.e.a de E de direction F,
alors pour tout $a \in \mathscr{F}$ on a $\mathscr{F} = a + F$.

Démonstration

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine
⇒ Interprétation des SEL
⇒ Vocabulaire sur les espaces affines
1. Problèmes
2. Introduction
3. Translatés d'un sous-espace vectoriel
3.1. Translation (linéaire)
3.2. (Sous-)Espaces affines
3.3. Exemples variés
4. Systèmes d'équations linéaires
4.1. Contextes
4.2. Interprétations
4.3. Structure de l'ensemble des solutions
5. Equations, intersections et parallélisme
5.1. Cas général
5.2. Dans un plan (espace de dimension 2)

Equation $u(x) = b$ avec u linéaire

Le résultat suivant est déjà connu, mais il s'interprète de manière tout à fait naturel dans le langage des espaces affines.

Théorème - Résolution d'une équation linéaire $u(x) = b$

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. On note $S_{\mathscr{E}}$ l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathscr{E})$: $u(x) = b$.

- Si $b \notin \mathrm{Im}\ u$ alors $S_{\mathscr{E}} = \emptyset$.
- Si $b \in \mathrm{Im}\ u$ alors $S_{\mathscr{E}} \neq \emptyset$ et si x_0 est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ alors

$$S_{\mathscr{E}} = \{x_0 + y ; y \in \mathrm{Ker}\ u\}.$$

($S_{\mathscr{E}}$ est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}\ u$.)

Equations différentielles

Pour l'exercice suivant, on donnera une base de l'espace directeur (ce qui donne aussi la valeur de la dimension de l'espace affine des solutions).

Equations différentielles

Pour l'exercice suivant, on donnera une base de l'espace directeur (ce qui donne aussi la valeur de la dimension de l'espace affine des solutions). Exercice

- Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation

$$y' + \cos x \times y = 1 + \tan^2 x + \sin x$$

- Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation

$$-3y'' + 4y' - y = \sin x$$

Partout...

Exercice

Trouver les suites (u_n) vérifiant :

$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 2$

Partout...

Exercice

Trouver les suites (u_n) vérifiant :

$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 2$

Exercice

Trouver l'ensemble des polynômes tels que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = 5$.

Partout...

Exercice

Trouver les suites (u_n) vérifiant :

$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 2$

Exercice

Trouver l'ensemble des polynômes tels que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = 5$.

Exercice

Trouver l'ensemble des nombres N tels que $N \equiv 1[3]$, $N \equiv 2[5]$, $N \equiv 4[7]$ et $N \equiv 1[11]$.

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine
⇒ Interprétation des SEL
⇒ Vocabulaire sur les espaces affines
1. Problèmes
2. Introduction
3. Translatés d'un sous-espace vectoriel
3.1. Translation (linéaire)
3.2. (Sous-)Espaces affines
3.3. Exemples variés
4. Systèmes d'équations linéaires
4.1. Contextes
4.2. Interprétations
4.3. Structure de l'ensemble des solutions
5. Equations, intersections et parallélisme
5.1. Cas général
5.2. Dans un plan (espace de dimension 2)

Rappels

En forme de rappels :

Définition - Vocabulaire

On considère le système de n équations à p inconnues :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1p}x_p=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2p}x_p=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{np}x_p=b_n \end{array}\right.$$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ est la matrice du système, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées du second membre.

On appelle système homogène associé à (S) le même système avec $b=0$

Rappels

Définition - Compatibilité du système

Le système est dit compatible si l'ensemble des solutions est non vide.

Rappels

Définition - Compatibilité du système

Le système est dit compatible si l'ensemble des solutions est non vide.

Remarque Rang du système

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine
⇒ Interprétation des SEL
⇒ Vocabulaire sur les espaces affines
1. Problèmes
2. Introduction
3. Translatés d'un sous-espace vectoriel
3.1. Translation (linéaire)
3.2. (Sous-)Espaces affines
3.3. Exemples variés
4. Systèmes d'équations linéaires
4.1. Contextes
4.2. Interprétations
4.3. Structure de l'ensemble des solutions
5. Equations, intersections et parallélisme
5.1. Cas général
5.2. Dans un plan (espace de dimension 2)

Nouveauté ?

Les résultats et propositions qui suivent découlent du cours précédent, ce qui change est leur interprétation (en fait, « le point de vue s'élargit »). Cela ne mérite donc, de manière générale, aucune démonstration.

Nouveauté ?

Les résultats et propositions qui suivent découlent du cours précédent, ce qui change est leur interprétation (en fait, « le point de vue s'élargit »). Cela ne mérite donc, de manière générale, aucune démonstration.

Proposition - Interprétation linéaire

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ définie par

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \end{array}$$

et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Alors

$$(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow u(x) = b$$

Le système est compatible si et seulement si $b \in \mathrm{Im}\ u$.

Rang

Proposition - Rang du système

Le rang du système (S) est égal au rang de u : $\text{rg}(S) = \text{rg}(A) = \text{rg}(u)$.

Rang

Proposition - Rang du système

Le rang du système (S) est égal au rang de u : $\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$.

Proposition - Interprétation duale

Considérons les n formes linéaires φ_i sur $\mathbb{K}^p$ définies par :

$$\varphi_i : \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_p) \mapsto a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p \end{array}$$

Alors

$(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution de $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \varphi_i(x) = b_i$

L'ensemble des solutions du système homogène est alors $\mathrm{Ker}\ \varphi_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\ \varphi_n$.

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

Interprétation affine de la résolution d'un système

On note $\mathbb{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène associé et $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions du système (S).

Interprétation affine de la résolution d'un système

On note $\mathbb{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène associé et $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions du système (S).

Théorème - Dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{S}_0$

$\mathbb{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p - \mathrm{rg}(S)$.

Interprétation affine de la résolution d'un système

On note $\mathbb{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène associé et $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions du système (S).

Théorème - Dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{S}_0$

$\mathbb{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p - \text{rg}(S)$.

Théorème - Résolution de système. Interprétation affine.

Si (S) est compatible, alors il existe une solution particulière x_0. Dans ce cas,

$$\mathbb{S} = \{x_0 + y; y \in \mathbb{S}_0\}$$

et $\mathbb{S}$ est un espace affine de dimension $p - \text{rg}(S)$.
Un tel système a $\text{rg}(S)$ inconnues principales et $p - \text{rg}(S)$ inconnues secondaires.

Exercice

Exercice

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & -5x_4 & +3x_5 & = & 8 \\ & 2x_2 & -4x_3 & -9x_4 & +7x_5 & = & 6 \\ -6x_1 & +7x_2 & -6x_3 & +11x_4 & -7x_5 & = & -23 \\ 2x_1 & -5x_2 & +14x_3 & +5x_4 & +3x_5 & = & 13 \end{array}\right.$$

Exercice

<u>Exercice</u>

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & -5x_4 & +3x_5 & = & 8 \\ & 2x_2 & -4x_3 & -9x_4 & +7x_5 & = & 6 \\ -6x_1 & +7x_2 & -6x_3 & +11x_4 & -7x_5 & = & -23 \\ 2x_1 & -5x_2 & +14x_3 & +5x_4 & +3x_5 & = & 13 \end{cases}$$

Donc $\mathbb{S} = (10,7,2,0,0) + \text{vect}\big((-23,-13,-3,0,2)\big)$

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine
⇒ Interprétation des SEL
⇒ Vocabulaire sur les espaces affines
1. Problèmes
2. Introduction
3. Translatés d'un sous-espace vectoriel
3.1. Translation (linéaire)
3.2. (Sous-)Espaces affines
3.3. Exemples variés
4. Systèmes d'équations linéaires
4.1. Contextes
4.2. Interprétations
4.3. Structure de l'ensemble des solutions
5. Equations, intersections et parallélisme
5.1. Cas général
5.2. Dans un plan (espace de dimension 2)
5.3. Dans un espace de

Intersection

Proposition - Intersection de sous-espaces affines

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G. Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine de direction le s.e.v $F \cap G$.

Intersection

Proposition - Intersection de sous-espaces affines

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G. Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine de direction le s.e.v $F \cap G$.

Démonstration

Intersection

Proposition - Intersection de sous-espaces affines

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G. Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine de direction le s.e.v $F \cap G$.

Démonstration

Si $F \cap G = \{0\}$, i.e. $F \oplus G$:

Corollaire - Espaces supplémentaires

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G vérifiant $F \oplus G = E$. Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton.

Intersection

Proposition - Intersection de sous-espaces affines

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G. Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine de direction le s.e.v $F \cap G$.

Démonstration

Si $F \cap G = \{0\}$, i.e. $F \oplus G$:

Corollaire - Espaces supplémentaires

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G vérifiant $F \oplus G = E$. Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton.

Remarque Hypothèse superflue ?

Espaces parallèles

Définition - Sous-espaces affines parallèles

On dit que le sous-espace affine $\mathscr{F}$ est parallèle au sous-espace affine $\mathscr{G}$ si $F \subset G$.
On dit que que deux sous espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles si $F = G$.

Espaces parallèles

Définition - Sous-espaces affines parallèles

On dit que le sous-espace affine $\mathscr{F}$ est parallèle au sous-espace affine $\mathscr{G}$ si $F \subset G$.
On dit que que deux sous espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles si $F = G$.

Attention. Relation d'équivalence. Relation d'ordre

Etre parallèle n'est donc pas une relation d'équivalence (non symétrique).
Mais il s'agit d'une pseudo-relation d'ordre (légère difficulté : on parle des espaces affines, et on a une égalité sur les espaces vectoriels, dans le cas de l'antisymétrie).
Par ailleurs, la relation n'est clairement pas totale

Equation

Proposition -Equation d'un hyperplan affine

Soit $\mathscr{R} = (\Omega, e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine de l'espace E de dimension n. Alors

- Un hyperlpan affine $\mathscr{H}$ de E possède au moins une équation dans $\mathscr{R}$ du type :
  $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h \text{ avec } (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0). \quad (*)$$
- Réciproquement la relation $(*)$ est l'équation d'un hyperlpan affine dont la direction admet pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$
- Deux équations de la forme $(*)$ représentent le même hyperplan affine si et seulement si elles sont proportionnelles.

Equation

Proposition -Equation d'un hyperplan affine

Soit $\mathscr{R} = (\Omega, e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine de l'espace E de dimension n. Alors

- Un hyperlpan affine $\mathscr{H}$ de E possède au moins une équation dans $\mathscr{R}$ du type :
  $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h \text{ avec } (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0). \quad (*)$$
- Réciproquement la relation $(*)$ est l'équation d'un hyperlpan affine dont la direction admet pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$
- Deux équations de la forme $(*)$ représentent le même hyperplan affine si et seulement si elles sont proportionnelles.

Démonstration

Equation de droites

On retrouve les résultats du plan usuel, qui sont généralisable à tout espace (affine) de dimension 2 (comme par exemple, l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Equation de droites

On retrouve les résultats du plan usuel, qui sont généralisable à tout espace (affine) de dimension 2 (comme par exemple, l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Théorème - Equation de droites

Soit $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère du plan. Alors

- Toute droite possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $\vec{u}(-b, a)$ en est un vecteur directeur.
- Réciproquement, toute équation cartésienne de ce type décrit une droite.
- Deux telles équations représentent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles.

Equation paramétrique

Définition - Equation paramétrique

Soit $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère du plan. Alors une droite possède des équations paramétriques (ou une représentation paramétrique) de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Il s'agit alors de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2)$.

Equation paramétrique

Définition - Equation paramétrique

Soit $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère du plan. Alors une droite possède des équations paramétriques (ou une représentation paramétrique) de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Il s'agit alors de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2)$.

Démonstration

Equation paramétrique

Définition - Equation paramétrique

Soit $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan. Alors une droite possède des équations paramétriques (ou une représentation paramétrique) de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Il s'agit alors de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2)$.

Démonstration

Proposition - Droites parallèles

Deux droites affines du plan sont parallèles si elles ont même direction
et, si elle ne sont pas parallèles, leur intersection est réduite à un point.

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

Droite (paramétrée)

Comme précédemment, dans le cas où l'espace vectoriel directeur est de dimension 1 (droite dans l'espace) :

Droite (paramétrée)

Comme précédemment, dans le cas où l'espace vectoriel directeur est de dimension 1 (droite dans l'espace) :

Définition - Représentation paramétrique d'une droite

Soit $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère quelconque de l'espace. Alors une droite possède des équations paramétriques (ou une représentation paramétrique) de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + tu_3 \end{array} \right.$$

Il s'agit alors de la droite passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$.

Plan (paramétré)

Comme précédemment, dans le cas où l'espace vectoriel directeur est de dimension 2 (plan dans l'espace) :

Plan (paramétré)

Comme précédemment, dans le cas où l'espace vectoriel directeur est de dimension 2 (plan dans l'espace) :

Définition - Représentation paramétrique d'un plan

Soit $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère quelconque de l'espace. Alors un plan possède des équations paramétriques (ou une représentation paramétrique) de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{array} \right. \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2$$

Il s'agit alors du plan passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ (Attention : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ doivent être linéairement indépendants, sinon il s'agit d'une droite).

Plan (cartésien)

Théorème - Equation cartésienne d'un plan

Soit $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère de l'espace. Alors

- Tout plan possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
- Réciproquement, toute équation cartésienne de ce type décrit un plan.

Plan (cartésien)

Théorème - Equation cartésienne d'un plan

Soit $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère de l'espace. Alors

- Tout plan possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
- Réciproquement, toute équation cartésienne de ce type décrit un plan.

Démonstration

Droite (cartésienne)

Proposition - Equations cartésiennes d'une droite

Soient deux plans d'équations respectives
$ax + by + cz + d = 0$
et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Alors

- Si (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles (i.e. ont le même plan vectoriel comme direction, ou les mêmes vecteurs directeurs).
  De plus si (a, b, c, d) et (a', b', c', d') sont proportionnels alors $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$, sinon $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \emptyset$.
- Si (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, alors $\Delta = \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est une droite.
  $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ s'appelle un système d'équations cartésiennes de Δ.

Bilan

Attention. Parallélisme et intersection

Dans l'espace de dimension 3,

- deux droites sont parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires,
- deux plans sont parallèles s'ils ont le même plan vectoriel pour direction,
- une droite peut être parallèle a un plan si son vecteur directeur appartient à la direction du plan,
- mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite,
- l'intersection d'une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à un plan $\mathscr{P}$, et du plan $\mathscr{P}$ est un point.

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Présentation et mise en place de la structure affine

- Idée : Espace vectoriel avec une origine déplacée.

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

- Idée : Espace vectoriel avec une origine déplacée.
- Définition de translation vectoriel : $t_a(x) = a + x$. $\mathscr{T}(E)$ est l'ensemble des translations
  $(\mathscr{T}(E), \circ)$ est un sous-groupe.

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

- Idée : Espace vectoriel avec une origine déplacée.
- Définition de translation vectoriel : $t_a(x) = a + x$. $\mathscr{T}(E)$ est l'ensemble des translations
  $(\mathscr{T}(E), \circ)$ est un sous-groupe.
- Espaces particuliers (selon les dimensions de F)

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

- Idée : Espace vectoriel avec une origine déplacée.
- Définition de translation vectoriel : $t_a(x) = a + x$. $\mathscr{T}(E)$ est l'ensemble des translations
  $(\mathscr{T}(E), \circ)$ est un sous-groupe.
- Espaces particuliers (selon les dimensions de F)
- Si $b \in \mathrm{Im}\ u$, $\{x \mid u(x) = b\} = x_0 + \mathrm{Ker}\ u$ est un espace affine !
  (indépendant du choix de x_0, une solution de $u(x) = b$)

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

- Reprise du vocabulaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

- Reprise du vocabulaire
- Une équation $\longleftrightarrow$ un hyperplan
  p équations : $\longleftrightarrow$ intersection de p hyperplans.

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

- Reprise du vocabulaire
- Une équation $\longleftrightarrow$ un hyperplan
  p équations : $\longleftrightarrow$ intersection de p hyperplans.
- On en déduit le rang puis si $b \in \mathrm{Im}\ u$ (selon les équations auxiliaires...)

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

- Reprise du vocabulaire
- Une équation $\longleftrightarrow$ un hyperplan
  p équations : $\longleftrightarrow$ intersection de p hyperplans.
- On en déduit le rang puis si $b \in \mathrm{Im}\ u$ (selon les équations auxiliaires. . .)
- La solution est un espace affine (non unicité de description)

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

- Forte inspiration de la géométrie. . .

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

- Forte inspiration de la géométrie...
- Intersection de deux sous-espaces affines.

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

- Forte inspiration de la géométrie...
- Intersection de deux sous-espaces affines.
- $\mathscr{E}$ est parallèle à $\mathscr{F}$ ssi $E \subset F$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

- Forte inspiration de la géométrie...
- Intersection de deux sous-espaces affines.
- $\mathscr{E}$ est parallèle à $\mathscr{F}$ ssi $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{F}$.
- Représentation dans le plan $\mathbb{R}^2$ et dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

- Forte inspiration de la géométrie...
- Intersection de deux sous-espaces affines.
- $\mathscr{E}$ est parallèle à $\mathscr{F}$ ssi $E \subset F$.
- Représentation dans le plan $\mathbb{R}^2$ et dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
- Deux points de vue descriptifs : cartésien ou paramétrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Présentation et mise en place de la structure affine

⇒ Interprétation des SEL

⇒ Vocabulaire sur les espaces affines

Pour le prochain cours

- Prochain cours : Lecture du cours : chapitre : Structure algébrique de l'ensemble des polynômes
- Exercice n° 530 & 533