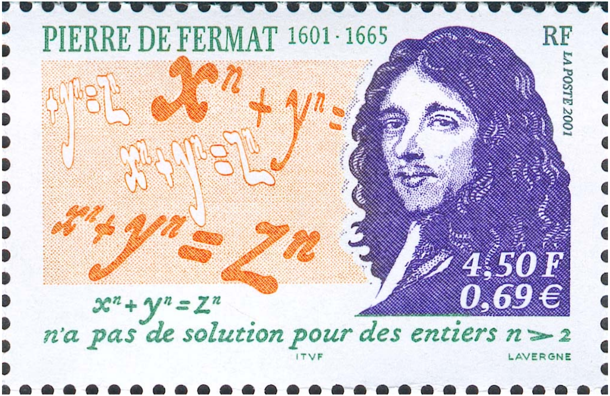

Leçon 85 - Le corps des fractions de l'anneau intègre des polynômes

8 avril 2025

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Problèmes

Problème

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}[X] \to ???$

Problèmes

Problème

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}[X] \to ???$

Problème

Intégration de fraction

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Problèmes

Problème

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}[X] \to ???$

Problème

Intégration de fraction

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Problème

Paramétrage rationnel de cercle

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Principe

Heuristique. Ensemble quotien

On crée l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ à l'image de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Z}$ était un anneau intègre mais pas un corps, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$. De même on va créer un corps contenant $\mathbb{K}[X]$.

Principe

Heuristique. Ensemble quotien

On crée l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ à l'image de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Z}$ était un anneau intègre mais pas un corps, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$. De même on va créer un corps contenant $\mathbb{K}[X]$.

Définition - Fractions rationnelles (par classe d'équivalence)

La relation binaire définie sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ par

$$(A_1,B_1)\mathscr{R}(A_2,B_2) \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$$

est une relation d'équivalence.
On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence, un élément F de $\mathbb{K}(X)$ est écrit sous la forme $F = \frac{A}{B}$ (ou $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$) où $(A,B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.
On a donc $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$
F s'appelle une fraction rationnelle.

Corps des fractions

Proposition - Corps des fractions rationnelles

Muni des lois internes $+$ et $\times$ définies par

$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1B_2+B_1A_2}{B_1B_2},\qquad \frac{A_1}{B_1}\times\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1A_2}{B_1B_2}$$

$(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un corps contenant $\mathbb{K}[X]$ (on identifie B à $\dfrac{B}{1}$).

Corps des fractions

Proposition - Corps des fractions rationnelles

Muni des lois internes + et × définies par

$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1B_2 + B_1A_2}{B_1B_2}, \quad \frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps contenant $\mathbb{K}[X]$ (on identifie B à $\frac{B}{1}$).

Démonstration

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Choix d'un (meilleur ?) représentant

Définition - Représentant irréductible

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ et $D = A \wedge B$. On a donc $A = DP$ et $B = DQ$ avec $P \wedge Q = 1$, et alors $F = \dfrac{P}{Q}$.

On dit que $\dfrac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

Choix d'un (meilleur ?) représentant

Définition - Représentant irréductible

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ et $D = A \wedge B$. On a donc $A = DP$ et $B = DQ$ avec $P \wedge Q = 1$, et alors $F = \dfrac{P}{Q}$.

On dit que $\dfrac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

Définition - Degré

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. L'élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $\deg A - \deg B$, est indépendant du choix du représentant $\dfrac{A}{B}$ de F. On l'appelle degré de la fraction rationnelle F, noté $\deg F$.

Il faut démontrer l'indépendance par représentant.

Démonstration

Degré d'une fraction

Proposition - Extension des propriétés sur les degrés

On a les propriétés suivantes :

$$\deg(F_1+F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2)$$
$$\deg F_1F_2 = \deg F_1 + \deg F_2$$
$$\deg F = -\infty \Leftrightarrow F = 0$$

Degré d'une fraction

Proposition - Extension des propriétés sur les degrés

On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&\deg(F_1+F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2)\\
&\deg F_1F_2 = \deg F_1 + \deg F_2\\
&\deg F = -\infty \Leftrightarrow F = 0
\end{aligned}$$

Démonstration

Racines. Pôles

Définition - Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F. Soit $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine (ou un zéro) de F si $P(a) = 0$ (a racine de P) et que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$ (a racine de Q).
La multiplicité d'une racine (resp. d'un pôle) de F est sa multiplicité en tant que racine de P (resp. de Q).

Racines. Pôles

Définition - Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F. Soit $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine (ou un zéro) de F si $P(a) = 0$ (a racine de P) et que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$ (a racine de Q).
La multiplicité d'une racine (resp. d'un pôle) de F est sa multiplicité en tant que racine de P (resp. de Q).

Remarque a pôle et racine de F ?

Racines. Pôles

Définition - Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F. Soit $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine (ou un zéro) de F si $P(a) = 0$ (a racine de P) et que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$ (a racine de Q).
La multiplicité d'une racine (resp. d'un pôle) de F est sa multiplicité en tant que racine de P (resp. de Q).

Remarque a pôle et racine de F ?

Exemple Racine et pôles de $\dfrac{X^3+X^2+X-3}{X^2-X}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Fonction

Définition - Fonction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F. On note Δ_F l'ensemble des pôles de F et on définit alors la fonction rationnelle associée à F par

$$\widetilde{F} : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \setminus \Delta_F & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{array}$$

Fonction

Définition - Fonction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F. On note Δ_F l'ensemble des pôles de F et on définit alors la fonction rationnelle associée à F par

$$\widetilde{F} : \begin{array}{ll} \mathbb{K} \setminus \Delta_F & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{array}$$

Remarque Egalité des fonctions

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Dérivation

Définition - Dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$ est indépendante du représentant choisi $\dfrac{A}{B}$ de F. On l'appelle dérivée de la fraction rationnelle F, notée F'.
Les propriétés vis à vis de la somme, du produit, ou du produit par un élément de $\mathbb{K}$ sont les propriétés usuelles.

Dérivation

Définition - Dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$ est indépendante du représentant choisi $\dfrac{A}{B}$ de F. On l'appelle dérivée de la fraction rationnelle F, notée F'.
Les propriétés vis à vis de la somme, du produit, ou du produit par un élément de $\mathbb{K}$ sont les propriétés usuelles.

Il faut démontrer l'indépendance du résultat en rapport au représentant.
Démonstration

Dérivation

Définition - Dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$ est indépendante du représentant choisi $\dfrac{A}{B}$ de F. On l'appelle dérivée de la fraction rationnelle F, notée F'.
Les propriétés vis à vis de la somme, du produit, ou du produit par un élément de $\mathbb{K}$ sont les propriétés usuelles.

Il faut démontrer l'indépendance du résultat en rapport au représentant.

Démonstration

Remarque Dérivation et fonction rationnelle

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Partie entière

Proposition - partie entière

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$. Alors il existe un unique couple $(E, \widehat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = E + \widehat{F} \text{ et } \deg \widehat{F} < 0.$$

E est appelée partie entière de la fraction F.

Partie entière

Proposition - partie entière

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$. Alors il existe un unique couple $(E, \widehat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = E + \widehat{F} \text{ et } \deg \widehat{F} < 0.$$

E est appelée partie entière de la fraction F.

Démonstration

Partie entière

Proposition - partie entière

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$. Alors il existe un unique couple $(E, \widehat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = E + \widehat{F} \text{ et } \deg \widehat{F} < 0.$$

E est appelée partie entière de la fraction F.

Démonstration

Savoir-faire. Comment obtenir la partie entière ?

Si $\deg F < 0$ alors $E = 0$, sinon on effectue la division euclidienne de P par Q : $P = EQ + R$ et $F = E + \dfrac{R}{Q}$.

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Gros théorème

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction irréductible. Q se décompose en produit de polynômes irréductibles
$Q = \lambda Q_1^{k_1} \dots Q_p^{k_p} = \lambda \prod_{j=1}^{p} Q_j^{k_j}$.
Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière,

$$F = E + \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{P_{1j}}{Q_j} + \frac{P_{2j}}{Q_j^2} + \dots + \frac{P_{k_j j}}{Q_j^{k_j}} \right)$$

où $P_{ij} \in \mathbb{K}[X], \deg P_{ij} < \deg Q_j$.
Cette décomposition s'appelle la **décomposition en éléments simples** sur $\mathbb{K}$ (ou dans $\mathbb{K}(X)$) de la fraction F.
Si $Q_j = X - a_j$, $a_j \in \mathbb{K}$, $\left(\dfrac{P_{1j}}{Q_j} + \dfrac{P_{2j}}{Q_j^2} + \dots + \dfrac{P_{k_j j}}{Q_j^{k_j}} \right)$ s'appelle la **partie polaire** de F relative (ou associée) au polynôme Q_j (ou au pôle a_j si $Q_j = X - a_j$).

Grosse démonstration

Heuristique. Principe de démonstration

On exploite une formule de Bézout généralisée pour démontrer l'existence.
Puis avec la formule de Taylor, on simplifie les fractions, ou mieux une décomposition en base Q_i.

Grosse démonstration

Heuristique. Principe de démonstration

On exploite une formule de Bézout généralisée pour démontrer l'existence.
Puis avec la formule de Taylor, on simplifie les fractions, ou mieux une décomposition en base Q_i.

Démonstration

Cas des pôles simples

Proposition - Pôles simples

Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$, $\deg F < 0$, pour trouver la partie polaire $\frac{\lambda}{X-a}$, on peut utiliser $\lambda = \frac{P(a)}{\widehat{Q}(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$ où $\widehat{Q}$ est telle que $Q = (X-a)\widehat{Q}$.

Cas des pôles simples

Proposition - Pôles simples

Si a est un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q}$, $\deg F < 0$, pour trouver la partie polaire $\dfrac{\lambda}{X-a}$, on peut utiliser $\lambda = \dfrac{P(a)}{\widehat{Q}(a)} = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$ où $\widehat{Q}$ est telle que $Q = (X-a)\widehat{Q}$.

Ce second résultat (avec Q', facile à obtenir car polynôme) évite même la factorisation de Q.

Cas des pôles simples

Proposition - Pôles simples

Si a est un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q}$, $\deg F < 0$, pour trouver la partie polaire $\dfrac{\lambda}{X-a}$, on peut utiliser $\lambda = \dfrac{P(a)}{\widehat{Q}(a)} = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$ où $\widehat{Q}$ est telle que $Q = (X-a)\widehat{Q}$.

Ce second résultat (avec Q', facile à obtenir car polynôme) évite même la factorisation de Q.

Démonstration

Savoir-faire (au pluriel !)

Savoir-faire. Obtenir la partie polaire - cas pôle simple

Si a est pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$, la partie polaire $\frac{\lambda}{X-a}$ s'obtient :
$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$

Savoir-faire (au pluriel !)

Savoir-faire. Obtenir la partie polaire - cas d'un pôle multiple

En isolant la partie polaire de a de multiplicité m, pour $Q = (X-a)^m \widehat{Q}$,

$$F = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-a)^k} + \frac{P_1}{\widehat{Q}}.$$

• En multipliant par $(X-a)^m$ et en substituant a à X on trouve λ_m.
• On retranche ensuite $\frac{\lambda_m}{(X-a)^m}$ à F, on obtient donc après simplification une fraction dont a est pôle de multiplicité $m-1$ et on recommence. Cette méthode est en pratique applicable si m est petit.

Savoir-faire (au pluriel !)

Savoir-faire. Obtenir la partie polaire - cas d'un pôle multiple

D'autres possibilités une fois λ_m obtenu :

• On multiplie par X puis on prend la limite en $+\infty$ de la fonction rationnelle obtenue : cela permet généralement d'obtenir λ_1.

• Si $m \geqslant 3$, on a donc obtenu λ_m et λ_1. Si l'on veut éviter les soustractions successives, on substitue des valeurs particulières simples à X autres que le pôle $(0, \ldots)$

Exercice d'application

<u>Exercice</u>

Décomposer en éléments simples la fraction $F = \dfrac{1}{X^2(X-1)^3}$.

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

Cas $\mathbb{K}$ algébriquement clos

Sur $\mathbb{C}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1.

Cas $\mathbb{K}$ algébriquement clos

Sur $\mathbb{C}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1.

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction irréductible. Q se décompose en produit de polynômes irréductibles $Q = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X - \alpha_j)^{k_j}$.

Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière et $A_{ij} \in \mathbb{C}$,

$$F = E + \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{A_{1j}}{X - \alpha_j} + \frac{A_{2j}}{(X - \alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{k_j j}}{(X - \alpha_j)^{k_j}} \right)$$

Application

Théorème - Lemme de Gauss-Lucas

Si $P = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X - \alpha_j)^{k_j}$ alors $\dfrac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{k_j}{X - \alpha_j}$.

Application

Théorème - Lemme de Gauss-Lucas

Si $P = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X - \alpha_j)^{k_j}$ alors $\dfrac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{k_j}{X - \alpha_j}$.

Démonstration

Application

Théorème - Lemme de Gauss-Lucas

Si $P = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X - \alpha_j)^{k_j}$ alors $\dfrac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{k_j}{X - \alpha_j}$.

Démonstration

Exercice

Donner la décomposition de $\dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}[X]$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Irréductibles de degré 1 ou 2

Sur $\mathbb{R}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1 ou 2 avec $\Delta < 0$.

Irréductibles de degré 1 ou 2

Sur $\mathbb{R}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1 ou 2 avec $\Delta < 0$.

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ irréductible,

$$Q = \lambda \prod_{j=1}^{p'} (X-\alpha_j)^{k'_j} \prod_{j=1}^{p''} (X^2+\delta_j X+\gamma_j)^{k''_j}.$$

Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière,

$$F = E + \sum_{j=1}^{p'} \left(\frac{A_{1j}}{X-\alpha_j} + \frac{A_{2j}}{(X-\alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{k'_j j}}{(X-\alpha_j)^{k'_j}} \right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{p''} \left(\frac{B_{1j}X+C_{1j}}{X^2+\delta_j X+\gamma_j} + \cdots + \frac{B_{k''_j j}X+C_{k''_j j}}{(X^2+\delta_j X+\gamma_j)^{k''_j}} \right),$$

tous les coefficients A, B, C étant des réels.

Savoir-faire

Savoir-faire. Décomposition en élément simples de deuxième espèce

On peut

- décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ et regrouper les pôles conjugués : cela marche bien quand la multiplicité est 1 ;
- procéder par identification ;
- quand il ne reste qu'un ou deux coefficients à calculer, on utilise des valeurs particulières : $0, 1, -1, +\infty, -\infty$;
- utiliser une éventuelle parité et l'unicité de la décomposition.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.
- C'est un corps ! (tout élément est inversible)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.
- C'est un corps ! (tout élément est inversible)
- Elément représentatif : fraction irréductible.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.
- C'est un corps ! (tout élément est inversible)
- Elément représentatif : fraction irréductible.
- Extension : degré, valuation, racines, pôles, dérivée

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.
- C'est un corps ! (tout élément est inversible)
- Elément représentatif : fraction irréductible.
- Extension : degré, valuation, racines, pôles, dérivée
- Fonctions rationnelles

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

- Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

- Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- Principe de décomposition en éléments simples.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

- Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- Principe de décomposition en éléments simples.
- Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

- Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- Principe de décomposition en éléments simples.
- Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$
- Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$ ou $X^2 - aX + b$, avec $a^2 - 4b < 0$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

- Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- Principe de décomposition en éléments simples.
- Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$
- Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$ ou $X^2 - aX + b$, avec $a^2 - 4b < 0$
- De nombreux savoir-faire.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

- Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- Principe de décomposition en éléments simples.
- Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$
- Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$ ou $X^2 - aX + b$, avec $a^2 - 4b < 0$
- De nombreux savoir-faire.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ Principe de la décomposition en éléments simples

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours :
  Chapitre : Espace de probabilité
- Exercices : N° 703 & 704
- TD Jeudi :
  8h-10h : N°692, 697, 698, 705, 706
  10h-12h : N° 693, 699, 707, 710