

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire des expériences aléatoires

- 2.1. Modélisation en probabilité
- 2.2. Expérience aléatoire
- 2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

- 3.1. Définitions
- 3.2. Propriétés
- 3.3. Suite (dé)croissante d'événements

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

- 2.1. Modélisation
- 2.2. Expérience aléatoire
- 2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

- 3.1. Définitions
- 3.2. Propriétés
- 3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Problème Structure mathématique

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Problème Structure mathématique

Problème Quelle définition pour la probabilité d'un événement ?

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Problème Structure mathématique

Problème Quelle définition pour la probabilité d'un événement ?

Problème Informatique

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Problème Incompatibilité des événements

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Problème Incompatibilité des événements

Problème Indépendance des événements

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Problème Incompatibilité des événements

Problème Indépendance des événements

Problème Deux événements en relation

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire des expériences aléatoires

2.1. Modélisation en probabilité

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Suite (dé)croissante d'événements

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ↘

Remarque introductive

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Heuristique. Sur quelques définitions. . .

Dans cette partie, nous commençons par quelques définitions qui ne sont pas très « mathématiques ». Elles donnent plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations.

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire des expériences aléatoires

2.1. Modélisation en probabilité

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Suite (dé)croissante d'événements

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

modèle (scientifique)

Le « modèle » est un concept clé en mathématiques de l'aléatoire et de manière générale en science même si ce concept a mis du temps à se dégager.

Nous renvoyons le lecteur au premier chapitre, on rappelle néanmoins :

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

modèle (scientifique)

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Le « modèle » est un concept clé en mathématiques de l'aléatoire et de manière générale en science même si ce concept a mis du temps à se dégager.

Nous renvoyons le lecteur au premier chapitre, on rappelle néanmoins :

Définition - Modèle mathématique

Un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel ou d'une description de la réalité.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Modélisation en probabilité

Heuristique. Modélisation en probabilité

Pour obtenir un modèle pseudo-concret associé à une situation réelle, il est d'abord nécessaire (**sans quoi, on ne peut pas faire grand chose**) de recenser toutes les résultats possibles de l'expérience que l'on observe → *définition de l'univers*.

L'étape supplémentaire consiste donc à **associer (si possible) à chacune des situations possibles un nombre qui mesure la possibilité de réalisation** → *définition de la tribu d'événements sur l'univers*.

Ces nombres (il y a plusieurs situations possibles) sont associés en une **fonction** de probabilité, elle prend ces valeurs dans un ensemble \mathcal{A} qui peut être celui des sous ensembles de Ω . Pour comprendre les propriétés essentielles vérifiées par \mathcal{A} , il faut voir celles que l'on souhaite associer à **P**. → *définition (enfin) de la probabilité*.

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire des expériences aléatoires

2.1. Modélisation en probabilité

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Suite (dé)croissante d'événements

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ↙

Expérience aléatoire

La définition suivante n'est pas très mathématique. C'est plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations :

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Expérience aléatoire

La définition suivante n'est pas très mathématique. C'est plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations :

Définition - Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat dépend du **hasard** :

- lancer de dé, tirage d'une carte, jeu de pile ou face,
- observation du nombre d'appels dans un central téléphonique pendant une durée fixée,
- observation de la durée de vie d'un individu anonyme d'une population, tirage d'un nombre au hasard entre 0 et 1...

A une telle expérience on associe l'ensemble de tous les résultats observables, noté Ω et appelé **univers** (ou univers des possibles).

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Expérience aléatoire

La définition suivante n'est pas très mathématique. C'est plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations :

Définition - Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat dépend du **hasard** :

- lancer de dé, tirage d'une carte, jeu de pile ou face,
- observation du nombre d'appels dans un central téléphonique pendant une durée fixée,
- observation de la durée de vie d'un individu anonyme d'une population, tirage d'un nombre au hasard entre 0 et 1...

A une telle expérience on associe l'ensemble de tous les résultats observables, noté Ω et appelé **univers** (ou univers des possibles).

Exemple Univers possibles

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire des expériences aléatoires

2.1. Modélisation en probabilité

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Suite (dé)croissante d'événements

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ↘

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Définition - Issu et événement aléatoire

Un élément de Ω est usuellement noté ω et appelé **issu**.

Un **événement aléatoire** A est représenté par l'ensemble des résultats ω qui le réalisent. C'est donc une partie de Ω .

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

Événements, événements élémentaires...

Définition - Issu et événement aléatoire

Un élément de Ω est usuellement noté ω et appelé **issu**.

Un **événement aléatoire** A est représenté par l'ensemble des résultats ω qui le réalisent. C'est donc une partie de Ω .

Exemple « Tirer » au hasard

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

Événements, événements élémentaires...

Définition - Vocabulaire probabiliste

On utilise le vocabulaire probabiliste suivant pour les événements :

notation	terminologie probabiliste
\emptyset	événement impossible
Ω	événement certain
\overline{A}	événement contraire de A
singleton $\{\omega\}$	événement élémentaire
$A \cup B$	événement A ou B
$A \cap B$	événement A et B
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A implique B

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Définition - Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, tels que $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Dans le cas où Ω est fini, un système complet d'événement est une famille finie (A_1, A_2, \dots, A_n) d'événements deux à deux incompatibles tels que $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Décomposition de Ω

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

Définition - Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, tels que $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Dans le cas où Ω est fini, un système complet d'événement est une famille finie (A_1, A_2, \dots, A_n) d'événements deux à deux incompatibles tels que $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Exemple Trivial

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Décomposition de Ω

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

Définition - Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, tels que $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Dans le cas où Ω est fini, un système complet d'événement est une famille finie (A_1, A_2, \dots, A_n) d'événements deux à deux incompatibles tels que $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Exemple Trivial

Remarque Partition

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire des expériences aléatoires

2.1. Modélisation en probabilité

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Suite (dé)croissante d'événements

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Probabilité sur un univers fini

On considère désormais le cas où Ω est un ensemble fini.

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Probabilité sur un univers fini

On considère désormais le cas où Ω est un ensemble fini.

Définition - Probabilité sur un univers fini

Soit Ω un univers fini.

On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$
tq

(i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

(ii) Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles,
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple (Ω, \mathbf{P}) où \mathbf{P} est une probabilité sur un univers fini Ω .

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

Probabilité sur un univers fini

On considère désormais le cas où Ω est un ensemble fini.

Définition - Probabilité sur un univers fini

Soit Ω un univers fini.

On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$
tq

(i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

(ii) Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles,
 $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple (Ω, \mathbf{P}) où \mathbf{P} est une probabilité sur un univers fini Ω .

Attention. Addition et réunion

Notons bien que l'on réunit les événements (et **on ne les additionne pas**) En revanche, on additionne les probabilités des événements (incompatibles) (et **on ne les réunit pas**)

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Définition - Evénements négligeable, presque sûr

Un événement A est dit **négligeable** si $\mathbf{P}(A) = 0$.

Un événement A est dit **presque sûr** (p.s.) si $\mathbf{P}(A) = 1$.

Une propriété \mathcal{P} est dite **presque sûre** (ou **vraie presque sûrement**) si la probabilité qu'elle se réalise vaut 1.

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Evénements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Vocabulaire et habitude

Définition - Evénements négligeable, presque sûr

Un événement A est dit **négligeable** si $\mathbf{P}(A) = 0$.

Un événement A est dit **presque sûr** (p.s.) si $\mathbf{P}(A) = 1$.

Une propriété \mathcal{P} est dite **presque sûre** (ou **vraie presque sûrement**) si la probabilité qu'elle se réalise vaut 1.

Savoir-faire. Une bonne habitude à prendre de suite

Lorsque l'on écrit $\mathbf{P}(A)$, surtout on ne *dit* pas « P de A » mais bien « *la probabilité de l'événement A* » ou beaucoup mieux : « *la probabilité que l'on ait obtenu un as* ».

On notera en effet : qu'il y a toujours un verbe dans une proposition relative dans ce cas là et donc qu'il manque un verbe dans la proposition principale. La dernière expression proposée invite naturellement à dire ensuite « *vaut* » ou « *est égale à* » ; ce que n'invite pas à faire « *P de A* »

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Evénements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire des expériences aléatoires

2.1. Modélisation en probabilité

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Suite (dé)croissante d'événements

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Premières propriétés

Proposition - Premières propriétés

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini. Alors

- $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow (\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) \text{ et } \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A))$
- Si A_1, \dots, A_n sont n événements deux à deux incompatibles alors $\mathbf{P}(\bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$.
- Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un s.c.é. alors $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) = 1$.
- Si $A_1, \dots, A_n \in \Omega$ alors $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$.

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. $(E_n) /$

Premières propriétés

Proposition - Premières propriétés

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini. Alors

- $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow (\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) \text{ et } \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A))$
- Si A_1, \dots, A_n sont n événements deux à deux incompatibles alors $\mathbf{P}(\bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$.
- Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un s.c.é. alors $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) = 1$.
- Si $A_1, \dots, A_n \in \Omega$ alors $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$.

Démonstration

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. $(E_n) /$

Détermination

⇒ Vocabulaire sur les
événements⇒ Propriétés
nécessaires

Proposition - Détermination d'une probabilité

Soit Ω un univers fini. Tout événement A est fini et est donc la réunion finie des événements élémentaires le constituant, par conséquent : $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$.

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ alors l'application $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$, $\{\omega_i\} \mapsto p_i$ définit une probabilité sur Ω

si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

Détermination

⇒ Vocabulaire sur les
événements⇒ Propriétés
nécessaires

Proposition - Détermination d'une probabilité

Soit Ω un univers fini. Tout événement A est fini et est donc la réunion finie des événements élémentaires le constituant, par conséquent : $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$.

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ alors l'application $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$, $\{\omega_i\} \mapsto p_i$ définit une probabilité sur Ω

si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire des expériences aléatoires

2.1. Modélisation en probabilité

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Suite (dé)croissante d'événements

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Ici, on souligne quelques manipulations ordinaires chez les
probabilistes :

Proposition - Réunion/intersection d'événements

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I, \omega \in A_i\} = [\forall i \in I, \omega \in A_i]$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I, \omega \in A_i\} = [\exists i \in I, \omega \in A_i]$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Ici, on souligne quelques manipulations ordinaires chez les probabilistes :

Proposition - Réunion/intersection d'événements

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I, \omega \in A_i\} = [\forall i \in I, \omega \in A_i]$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I, \omega \in A_i\} = [\exists i \in I, \omega \in A_i]$$

On remplace parfois des « il existe » (resp. « pour tout ») par des réunions (resp. par des intersections).

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Evénements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

(Dé)croissance

Définition - Suites (dé)croissantes d'événements

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements, si pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$A_i \subset A_{i+1} \text{ ou } A_i \Rightarrow A_{i+1} \text{ (resp. } A_{i+1} \subset A_i \text{ ou } A_{i+1} \Rightarrow A_i)$$

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

(Dé)croissance

Définition - Suites (dé)croissantes d'événements

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements, si pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$A_i \subset A_{i+1} \text{ ou } A_i \Rightarrow A_{i+1} \text{ (resp. } A_{i+1} \subset A_i \text{ ou } A_{i+1} \Rightarrow A_i)$$

Exemple. $E_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ et $F_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$.

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

(Dé)croissance

Définition - Suites (dé)croissantes d'événements

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements, si pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$A_i \subset A_{i+1} \text{ ou } A_i \Rightarrow A_{i+1} \text{ (resp. } A_{i+1} \subset A_i \text{ ou } A_{i+1} \Rightarrow A_i)$$

Exemple. $E_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ et $F_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Savoir-faire. Suite croissante d'événements et convergence

Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \nearrow$, alors on note $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$.

Et donc on a une réunion disjointe : $A_{i+1} = A_i \cup B_i$, réunion disjointe, donc $\mathbf{P}(A_{i+1}) = \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}(B_i)$.

Par télescopage : $\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}(B_i)$.

On passe alors à la limite monotone...

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. $(E_n) \nearrow$

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

- ▶ On raisonne sur l'ensemble des réalisables. Cette année, cette ensemble sera fini

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

- ▶ On raisonne sur l'ensemble des réalisables. Cette année, cette ensemble sera fini
- ▶ On modélise les observations par des sous-ensembles ou événements voire issus (événements élémentaires).

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

- ▶ On raisonne sur l'ensemble des réalisables. Cette année, cette ensemble sera fini
- ▶ On modélise les observations par des sous-ensembles ou événements voire issus (événements élémentaires).
- ▶ Un peu de vocabulaire : événements impossible, certain, contraire, élémentaire, A ou B , A et B , A et B sont incompatibles, A implique B .

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

- ▶ On raisonne sur l'ensemble des réalisables. Cette année, ce ensemble sera fini
- ▶ On modélise les observations par des sous-ensembles ou événements voire issus (événements élémentaires).
- ▶ Un peu de vocabulaire : événements impossible, certain, contraire, élémentaire, A ou B , A et B , A et B sont incompatibles, A implique B .
- ▶ Système complet d'événements (partition - comme une base d'étude)

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

- ▶ \mathbf{P} est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, ensemble de tous les événements possibles,

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)
- ⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité
 - ▶ \mathbf{P} est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, ensemble de tous les événements possibles,
 - ▶ \mathbf{P} est à valeurs dans $[0, 1]$

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

- ▶ \mathbf{P} est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, ensemble de tous les événements possibles,
- ▶ \mathbf{P} est à valeurs dans $[0, 1]$
- ▶ et vérifie $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et si A et B sont incompatibles, alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)
- ⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

- ▶ \mathbf{P} est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, ensemble de tous les événements possibles,
- ▶ \mathbf{P} est à valeurs dans $[0, 1]$
- ▶ et vérifie $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et si A et B sont incompatibles, alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
- ▶ Des propriétés calculatoires :
 - ▶ $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
 - ▶ $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
 - ▶ $A \subset B \Rightarrow (\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) \text{ et } \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \text{ (faux si } A \not\subset B))$
 - ▶ Si A_1, \dots, A_n sont 2 à 2 incompatibles alors $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$. Sinon $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$.

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces
probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) /

⇒ Vocabulaire sur les
événements

⇒ Propriétés
nécessaires

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 35 : Espaces de probabilité
Loi uniforme et probabilité conditionnelle
- ▶ Exercice N° 714 & 717

1. Problèmes

2. Vocabulaire

2.1. Modélisation

2.2. Expérience aléatoire

2.3. Événements

3. Espaces

probabilisés finis

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. (E_n) ✓