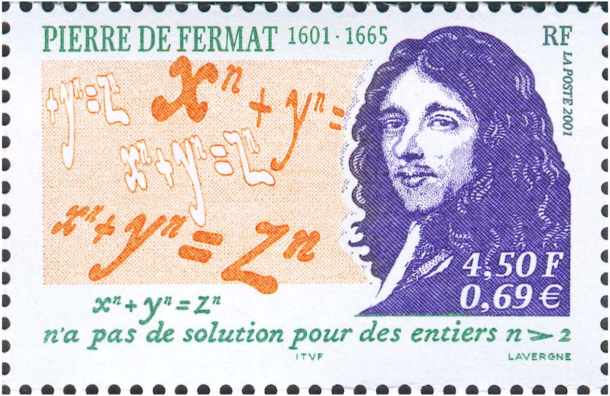


Leçon 87 - Espaces de probabilité

10 avril 2025

⇒Probabilité uniforme

⇒ Conditionnement et conséquences

Probabilité uniforme

Définition - Probabilité uniforme sur un univers fini

On appelle **probabilité uniforme** sur Ω, univers fini, la probabilité telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables. Nécessairement

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} \text{ et } \mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{« nb de cas fav. »}}{\text{« nb total de cas »}}$$

on dit aussi qu'on est sous **hypothèse d'équiprobabilité.**

Probabilité uniforme

Définition - Probabilité uniforme sur un univers fini

On appelle **probabilité uniforme** sur Ω, univers fini, la probabilité telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables. Nécessairement

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} \text{ et } \mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{« nb de cas fav. »}}{\text{« nb total de cas »}}$$

on dit aussi qu'on est sous **hypothèse d'équiprobabilité.**

Attention. D'autres probabilités

On peut, bien évidemment définir d'autres probabilités que la probabilité uniforme sur un univers fini.

Exercices

Exercice

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Définir une probabilité sur $\mathbf{P}(\Omega)$ telle que le 6 ait une chance sur deux de sortir (exemple de dé pipé...avec un peu de plomb d'un côté, ça doit pouvoir se faire !)

Exercices

Exercice

On lance trois dés honnêtes. Calculer :

1. la probabilité d'obtenir au moins un as.
2. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.
3. la probabilité que la somme des chiffres soit paire.
4. la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit paire et que l'on ait au moins deux faces identiques.

Exemple de probabilité non uniforme

Exemple Probabilité non uniforme.

Exemple de probabilité non uniforme

Exemple Probabilité non uniforme.

Application Jeu de « Passe-Dix »

Choix du modèle

Savoir-faire. Choix du modèle

Dans ces premiers exercices de probabilité, il faut avec précision définir le modèle étudié

1. la définition de Ω est très importante. Il faut coller au plus près de la réalisation de l'expérience ; Ω est l'ensemble des réalisations possibles. Vous pouvez commencer par vous demander quelle est la meilleure façon de décrire ces solutions.
   Comment décrire une solution ? Cette description permet-elle de décrire toutes les solutions, et réussit-elle à faire la différence entre deux solutions différentes ?
2. en ce qui concerne la tribu, il s'agit souvent de prendre $\mathscr{P}(\Omega)$.
3. en ce qui concerne le choix de la probabilité, dans cette première catégorie d'exercices, il s'agira souvent de prendre la probabilité uniforme.
   On peut penser à l'exercice du lancer de deux dés...

Exercice

<u>Exercice</u>

Le chevalier de Méré (personnage historique de la cour de Louis XIV) avance deux règles :

- *« il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un six en lançant un dé quatre fois de suite »*
- *« il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un double-six en lançant deux dés vingt-quatre fois de suite »*

Que pensez-vous de ces règles ?

Utilisation de Python pour faire des simulations

Avec Python, la seule mesure de probabilité définie sur un ensemble fini est la mesure uniforme.

Python - Rappel des commandes en python

Il faut importer la bibliothèque random. Puis la commande `randint(1,n)` tire « au hasard », en suivant une loi uniforme, un nombre entre 1 et n.
Parfois on a besoin de `random` qui tire un nombre aléatoire entre 0 et 1.

Utilisation de Python pour faire des simulations

Voyons le programme du tirage de deux dés.

Python - Simulation du lancer de dés

```
def deux-dés:
  """ résultat du lancer de 2 dés"""
  a:=randint(1,6)+randint(1,6)
  return(a)
```

Simulations

Attention. Quelle différence ?

Comparer : `a:=randint(1,6)+randint(1,6)` et `a:=2*randint(1,6)`

Le second tire un seul nombre entre 1 et 6 et le multiplie par deux. Ainsi, on simule ici un tirage uniforme dont les résultats possibles sont $2, 4, 6, 8, 10$ et 12.

Simulations

Attention. Quelle différence ?

Comparer : `a:=randint(1,6)+randint(1,6)` et `a:=2*randint(1,6)`

Le second tire un seul nombre entre 1 et 6 et le multiplie par deux. Ainsi, on simule ici un tirage uniforme dont les résultats possibles sont $2, 4, 6, 8, 10$ et 12.

Analyse Etude et résultat du programme
Après $1\,000$ simulations de ce programme, on a obtenu les résultats suivants :

résultat	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
quantité	29	53	85	107	140	167	144	113	87	61	14
proportion	$0,029$	$0,053$	$0,085$	$0,107$	$0,140$	$0,167$	$0,144$	$0,113$	$0,087$	$0,061$	$0,014$
probabilité	$0,027$	$0,055$	$0,083$	$0,111$	$0,138$	$0,166$	$0,138$	$0,111$	$0,083$	$0,055$	$0,027$

Résultat fréquentielle et probabilité a priori

Remarque Différence entre résultat fréquentielle et probabilité a priori

Résultat fréquentielle et probabilité a priori

Remarque Différence entre résultat fréquentielle et probabilité a priori

Exercice

Programmer en Python deux programmes pour simuler les jeux du chevalier de Méré.
Effectuer 20 simulations de 1000 parties de chacun des jeux.
Que pensez-vous du résultat ?

⇒Probabilité uniforme

⇒ Conditionnement et conséquences

Probabilité conditionnelle

Heuristique. Principe du conditionnement

Le but de ce paragraphe est d'expliquer comment tenir compte d'informations déjà connues, mais également de voir comment retrouver des résultats relatifs au "passé".

Par exemple, si on lance deux dés parfaits et que l'on note :

A : « la somme des points obtenus est au moins égale à 10 »,

B : « le premier dé amène un 3 »,

C : « le premier dé amène un 6 ».

Une fois le premier lancer effectué, si B est réalisé, on a des informations sur la réalisation de A. . .mais également si C est réalisé.

De même, une tierce personne arrivant après l'expérience, à laquelle on dit avoir obtenu une somme égale à 11 peut dire si B a été réalisé.

Probabilité conditionnelle

Définition - Probabilité conditionnelle sachant l'événement A

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement de probabilité non nulle. Soit A un événement quelconque.
On appelle **probabilité de A sachant B** le nombre $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$, également noté $\mathbf{P}(A|B)$.
Alors l'application $\mathbf{P}_B$ est bien une probabilité définie sur Ω

Probabilité conditionnelle

Définition - Probabilité conditionnelle sachant l'événement A

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement de probabilité non nulle. Soit A un événement quelconque.
On appelle **probabilité de A sachant B** le nombre $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$, également noté $\mathbf{P}(A|B)$.
Alors l'application $\mathbf{P}_B$ est bien une probabilité définie sur Ω

Démonstration

Probabilité conditionnelle

Définition - Probabilité conditionnelle sachant l'événement A

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement de probabilité non nulle. Soit A un événement quelconque.
On appelle **probabilité de A sachant B** le nombre $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$, également noté $\mathbf{P}(A|B)$.
Alors l'application $\mathbf{P}_B$ est bien une probabilité définie sur Ω

Démonstration

Remarque Du sens de cette formule

Utilisation

Exercice

Considérons une famille dont nous savons qu'elle a deux enfants et supposons que les quatre répartitions possibles, dans l'ordre de naissance, FF, FG, GF, GG sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que le cadet est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

Utilisation

<u>Exercice</u>
Considérons une famille dont nous savons qu'elle a deux enfants et supposons que les quatre répartitions possibles, dans l'ordre de naissance, FF, FG, GF, GG sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que le cadet est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

Remarque Utilisation fréquente

Utilisation

<u>Exercice</u>

Considérons une famille dont nous savons qu'elle a deux enfants et supposons que les quatre répartitions possibles, dans l'ordre de naissance, FF, FG, GF, GG sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que le cadet est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

Remarque Utilisation fréquente

Attention. Grosse faute, classique

Il est très important de bien faire la différence entre $\mathbf{P}(A \cap B)$ et $\mathbf{P}_A(B)$.

• $\mathbf{P}(A \cap B)$ est la probabilité d'avoir A et B.

• $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B|A)$ est la probabilité d'avoir B , sachant que A est réalisé

Exploiter le formalisme

Savoir-faire. Suivre un certain formalisme

Dans ce genre d'exercice, la démarche est toujours identique :

1. Présenter les événements importants.
   Ne pas en donner une liste trop grande (on exploitera les notations de complémentaires).
   On fera attention à donner des noms significatifs à ces événements.
2. Exprimer la(les) relation(s) vérifiées par les probabilités connues et à trouver
3. Présenter le modèle « naturelle »donnant les probabilités des événements selon l'énoncé (probabilité uniforme bien choisie, justifiée mais sans excès)

Insistons, il s'agit bien **de définir des événements** A_1 et **pas des probabilités** p_1. On cherche alors $\mathbf{P}(A_1)$...

Exploiter le formalisme

<u>Exercice</u>

Soient $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$ deux urnes contenant chacune 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire au hasard une boule de l'urne $\mathscr{U}_1$, on note sa couleur et on la met dans $\mathscr{U}_2$. On tire alors au hasard une boule de $\mathscr{U}_2$. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule noire ?

Formule des probabilités composées

Proposition - Formule des probabilités composées

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'événements tels que $\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$ alors

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités composées

Proposition - Formule des probabilités composées

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'événements tels que $\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$ alors

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration

Exercices

<u>Exercice</u>

Une urne contient 4 boules blanches, 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir, dans cet ordre, deux blanches puis une noire ?

Exercices

<u>Exercice</u>

Une urne contient 4 boules blanches, 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir, dans cet ordre, deux blanches puis une noire ?

<u>Exercice</u>

Une urne contient 10 boules blanches et 10 boules noires.
On effectue une suite de tirage de boules de l'urne, on note sa couleur, puis :

- on l'a remet si elle est noire
- on la garde si elle est blanche

Calculer la probabilité p_n qu'au cours des n premiers tirages, on est retiré une et une seule boule blanche.
Quelle est la limité de p_n ? Donner un équivalent de (p_n).

Formule des probabilités totales

Proposition - Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout événement B on a

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$$

En particulier si $\mathbf{P}(A) \neq 0, 1$, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$.

Formule des probabilités totales

Proposition - Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout événement B on a

$$\mathbf{P}(B)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$$

En particulier si $\mathbf{P}(A)\neq 0,1$, $\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B)+\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$.

Démonstration

Formule des probabilités totales

<u>Exercice</u>

Soit n un entier non nul. Une urne $\mathscr{U}$ contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, ..., n jetons numérotés n. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n ; l'urne i contient i boules blanches et $n-i$ noires. On tire un jeton dans $\mathscr{U}$, s'il est numéroté i, on prélève une boule dans l'urne i.

Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

Formule des probabilités totales

<u>Exercice</u>

Soit n un entier non nul. Une urne $\mathscr{U}$ contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, ..., n jetons numérotés n. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n ; l'urne i contient i boules blanches et $n-i$ noires. On tire un jeton dans $\mathscr{U}$, s'il est numéroté i, on prélève une boule dans l'urne i.

Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

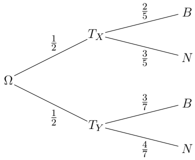
Attention - Ne pas oublier...

... de préciser (et de démontrer, si nécessaire) que nous sommes en présence d'un système complet d'événements

Arbre

Savoir-faire. Botanique (1)

L'exercice nous montre que cette formule s'applique **à chaque fois que des événements sont liés** (vous avez envie de faire un arbre)



La somme des probabilités de chaque branche, partant d'une même racine vaut 1. Le nombre figurant sur chaque branche correspond à la probabilité de l'événement situé à droite de la branche, sachant l'événement situé à gauche. Attention à ne pas sommer abusivement les probabilités associées aux branches de l'arbre.

Formule de Bayes

Proposition - Formules de Bayes

Soit B, événement de probabilité non nulle.

1. Si A est un événement de probabilité non nulle, alors

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

2. Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout j on a

$$\mathbf{P}_B(A_j) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A_j)\mathbf{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)}$$

Formule de Bayes

Proposition - Formules de Bayes

Soit B, événement de probabilité non nulle.

1. Si A est un événement de probabilité non nulle, alors
$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

2. Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout j on a
$$\mathbf{P}_B(A_j) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A_j)\mathbf{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)}$$

Démonstration

Arbre

Savoir-faire. Botanique (2)

L'exercice nous montre que cette formule s'applique à chaque fois que vous avez envie de faire un arbre...et que la question posée remonte la chronologie naturelle de l'arbre.
Il s'agit de calculer la probabilité d'un premier événement, sachant que c'est le deuxième qui est en fait réalisé...

Arbre

Savoir-faire. Botanique (2)

L'exercice nous montre que cette formule s'applique à chaque fois que vous avez envie de faire un arbre…et que la question posée remonte la chronologie naturelle de l'arbre.
Il s'agit de calculer la probabilité d'un premier événement, sachant que c'est le deuxième qui est en fait réalisé…

Exemple QCM

Exercices

<u>Exercice</u>

Un taxi est impliqué dans un carambolage de nuit. Deux compagnies de taxi, les Rouges et les Bleus, opèrent en ville. Nous savons que 85% des taxis en ville sont Rouge et 15% sont Bleus.

1. Quelle est la probabilité que le taxi impliqué dans l'accident soit un Bleu ?

Quelques heures plus tard nous apprenons qu'un témoin a identifié le taxi responsable comme Bleu. Le tribunal a testé la fiabilité des témoignages dans ce type de circonstances (accident de nuit) et en a conclu que les témoins identifient correctement les couleurs avec une probabilité p et se trompent avec une probabilité $1-p$.

Nous définissons les événements :

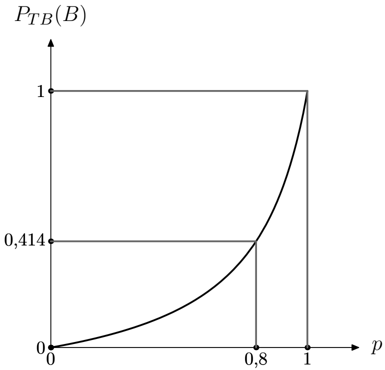
- B est l'événement :"Le taxi est bleu", son complémentaire est R.
- TB est l'événement :"Le témoignage a affirmé que le taxi est bleu", son complémentaire est TR.

2. Quelle est la probabilité pour que le taxi impliqué dans l'accident soit un Bleu ?

On étudiera les situations : $p=0$, $p=1$ et $p=0,8$ et on pourra tracer $\mathbf{P}_{TB}(B)$ en fonction de p.

3. Que se passe-t-il si n témoins indépendants affirment qu'il s'agit d'un taxi bleu ?

Exercices



Exercices

Exercice

Une usine possède trois ateliers de production de poupées : A, B et C.

L'atelier A est responsable de 60% de la production de poupées de l'usine, B de 25% et C de 15%.

Le technicien qualité de l'entreprise estime que

- A la sortie de A, il y a 1 poupée barbue sur 1000.
- A la sortie de B, il y a 50 poupées barbues sur 1000.
- A la sortie de C, il y a 10 poupées barbues sur 1000.

1. Calculer la probabilité qu'une poupée prise au hasard dans les stocks de l'usine soit barbue ?
2. Manque de bol !, le technicien qualité est tombé sur une poupée barbue. Calculer la probabilité que celle-ci soit issue de l'usine A. De même pour l'usine B. De même pour l'usine C.

Exercices

Attention. $\mathbf{P}_a(barbe)$

Notons que dans cet exercice (*et dans la plupart*), ce qui nous intéresse en réalité c'est d'exploiter cette formule des probabilités totales. Et dans ces cas, la probabilité conditionnelle ne s'obtient pas par un calcul forcé du genre $\mathbf{P}_a(barbe) = \frac{\mathbf{P}(barbe)}{\mathbf{P}(a)}$, mais **il est donné dans les hypothèses de l'énoncé** !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Probabilité uniformes

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Probabilité uniformes

- Il n'y a pas qu'une probabilité définie sur Ω fini, mais. . .

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Probabilité uniformes

- Il n'y a pas qu'une probabilité définie sur Ω fini, mais. . .
- . . .la plus fréquente et à la base de toute est la probabilité uniforme :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Probabilité uniformes

- Il n'y a pas qu'une probabilité définie sur Ω fini, mais…
- …la plus fréquente et à la base de toute est la probabilité uniforme :
$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$$
- En fait le choix de la probabilité se pose et se justifie comme on justifie un modèle.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Probabilité uniformes

- Il n'y a pas qu'une probabilité définie sur Ω fini, mais...
- ...la plus fréquente et à la base de toute est la probabilité uniforme :
$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$$
- En fait le choix de la probabilité se pose et se justifie comme on justifie un modèle.
- On peut exploiter `random` de Python pour simuler la loi uniforme et toute loi finie.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Probabilité uniformes

- Il n'y a pas qu'une probabilité définie sur Ω fini, mais...
- ...la plus fréquente et à la base de toute est la probabilité uniforme :
$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$$
- En fait le choix de la probabilité se pose et se justifie comme on justifie un modèle.
- On peut exploiter `random` de Python pour simuler la loi uniforme et toute loi finie.
- Ne pas confondre probabilité et résultat statistique fréquentialiste (avec ou sans simulation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Probabilité uniformes

⇒ Conditionnement et conséquences

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Probabilité uniformes

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences

- Soit A, non négligeable, $\mathbf{P}_A : B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ est une probabilité,

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Probabilité uniformes

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences

- Soit A, non négligeable, $\mathbf{P}_A : B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ est une probabilité,
- Formule des probabiltiés composées (succession d'expériences élémentaires dépendantes)

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Probabilité uniformes

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences

- Soit A, non négligeable, $\mathbf{P}_A : B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ est une probabilité,
- Formule des probabiltiés composées (succession d'expériences élémentaires dépendantes)

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

- Formule des probabilités totales (une (seconde) expérience paramétrée par une famille de résultats d'une première expérience)

$$(A_i), \text{ sce alors } \mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Probabilité uniformes

⇒ Conditionnement et conséquences

- Soit A, non négligeable, $\mathbf{P}_A : B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ est une probabilité,
- Formule des probabiltiés composées (succession d'expériences élémentaires dépendantes)

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

- Formule des probabilités totales (une (seconde) expérience paramétrée par une famille de résultats d'une première expérience)

$$(A_i)\text{, sce alors } \mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$$

- Formule de Bayes (Connaissant le résultat d'une seconde expérience, on cherche à obtenir les probabilités des issus d'une première expérience élémentaire.)

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Probabilité uniformes

⇒ Conditionnement et conséquences

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 35 : Espaces de probabilité
  Évenements indépendants
- Exercice n° 731, 729, 734