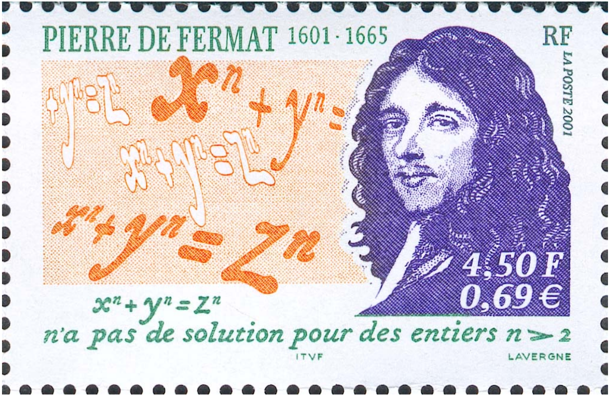

Leçon 88 - Espaces de probabilité

11 avril 2025

⇒ Conditionnement et conséquences. . .

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

⇒ Conditionnement et conséquences...

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

Probabilité conditionnelle

Définition - Probabilité conditionnelle sachant l'événement A

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement de probabilité non nulle. Soit A un événement quelconque.
On appelle **probabilité de A sachant B** le nombre $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$, également noté $\mathbf{P}(A|B)$.
Alors l'application $\mathbf{P}_B$ est bien une probabilité définie sur Ω

Formule des probabilités composées

Proposition - Formule des probabilités composées

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'événements tels que $\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$ alors

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales

Proposition - Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout événement B on a

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$$

En particulier si $\mathbf{P}(A) \neq 0, 1$, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$.

Formule de Bayes

Proposition - Formules de Bayes

Soit B, événement de probabilité non nulle.

1. Si A est un événement de probabilité non nulle, alors

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

2. Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout j on a

$$\mathbf{P}_B(A_j) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A_j)\mathbf{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)}$$

⇒ Conditionnement et conséquences. . .

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

Indépendance(s) en probabilité

Définition - Indépendance (en probabilité)

Deux événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P) sont dits indépendants (ou indépendants en probabilité) si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Indépendance(s) en probabilité

Définition - Indépendance (en probabilité)

Deux événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P) sont dits indépendants (ou indépendants en probabilité) si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Ce nouveau point de vue a peut-être pas plus de sens

Proposition - Autre point de vue

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants (pour $\mathbf{P}$) si et seulement si $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

Indépendance(s) en probabilité

Définition - Indépendance (en probabilité)

Deux événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P) sont dits indépendants (ou indépendants en probabilité) si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Ce nouveau point de vue a peut-être pas plus de sens

Proposition - Autre point de vue

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants (pour $\mathbf{P}$) si et seulement si $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

Démonstration

Indépendance(s) en probabilité

Attention. Dépendance des événements, a priori selon la probabilité considérée

Cette notion dépend de la probabilité considérée sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Indépendance(s) en probabilité

Attention. Dépendance des événements, a priori selon la probabilité considérée

Cette notion dépend de la probabilité considérée sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Exemple Illustration de la remarque précédente

Confusion classique

Attention. Ne pas confondre incompatibles et indépendants

On fera bien attention à ne pas confondre :

- *A et B sont incompatibles* :
  cette notion ne dépend pas de la probabilité : $A \cap B = \emptyset$.
  cela sert pour calculer $\mathbf{P}(A \cup B)$
  (on parle aussi d'événements disjoints avec une vision ensembliste).
- *A et B sont indépendants* :
  cette notion dépend de la probabilité :
  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.
  cela sert pour calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$

En fait deux événements (non négligeables) incompatibles ne peuvent pas être indépendants.
Si l'un se réalise, alors l'autre ne peut pas se réaliser...

Indépendances

Définition - Cas de plus de 2 événements

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini

1. n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants si
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j, \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$
2. n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si
$$\forall J \subset [\![1, n]\!], \mathbf{P}(\textstyle\bigcap_{j \in J} A_j) = \displaystyle\prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

Indépendances

Définition - Cas de plus de 2 événements

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini

1. n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants si
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j, \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$
2. n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si
$$\forall J \subset [\![1, n]\!], \mathbf{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

Proposition - Equivalence des complémentaires

A, B indépendants $\Rightarrow$ $A, \overline{B}$ indépendants & $\overline{A}, \overline{B}$ indépendants.
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.
Posons pour tout $i \leqslant n$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.
Alors $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Indépendances

Définition - Cas de plus de 2 événements

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini

1. n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants si
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j, \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$
2. n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si
$$\forall J \subset [\![1, n]\!], \mathbf{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

Proposition - Equivalence des complémentaires

A, B indépendants $\Rightarrow$ $A, \overline{B}$ indépendants & $\overline{A}, \overline{B}$ indépendants.
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.
Posons pour tout $i \leqslant n$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.
Alors $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration

Indép. mutuelle⇒ indép. 2 à 2

Remarque Une implication

Indép. mutuelle$\Rightarrow$ indép. 2 à 2

Remarque Une implication

Exercice

Démontrer l'implication

Exercices

<u>Exercice</u>

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.

Les événements A « la carte tirée est un pique » et B « la carte tirée est un roi » sont-ils indépendants ?

Exercices

<u>Exercice</u>

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.

Les événements A « la carte tirée est un pique » et B « la carte tirée est un roi » sont-ils indépendants ?

<u>Exercice</u>

On lance deux dés parfaits. On note :

- A_1 : « le premier dé amène un nombre pair »,
- A_2 : « le deuxième dé amène un nombre pair »,
- A_3 : « la somme des nombres obtenus est paire ».

Les événements A_1, A_2, A_3 sont-ils mutuellement indépendants ?Et deux à deux ?

Exercices

<u>Exercice</u>

On permute au hasard les chiffres $1, 2, 3, 4$. On considère les événements

- A : « 1 est avant 2 »
- B : « 3 est avant 4 ».

A et B sont-ils indépendants ?

Exercices

Exercice

On permute au hasard les chiffres $1, 2, 3, 4$. On considère les événements

- A : « 1 est avant 2 »
- B : « 3 est avant 4 ».

A et B sont-ils indépendants ?

Exercice

On considère une famille ayant n enfants ($n \geqslant 2$). On suppose que toutes les répartitions possibles des sexes des n enfants sont équiprobables.

Les événements « la famille a des enfants des deux sexes »et « la famille a au plus une fille »sont-ils indépendants ?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences...

$\Rightarrow$ Evénements indépendants (selon une probabilité)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences...

- Soit A, non négligeable, $\mathbf{P}_A : B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ est une probabilité,

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences…

- Soit A, non négligeable, $\mathbf{P}_A : B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ est une probabilité,
- Formule des probabiltiés composées (succession d'expériences élémentaires dépendantes)

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences. . .

- Soit A, non négligeable, $\mathbf{P}_A : B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ est une probabilité,
- Formule des probabiltiés composées (succession d'expériences élémentaires dépendantes)

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

- Formule des probabilités totales (une (seconde) expérience paramétrée par une famille de résultats d'une première expérience)

(A_i), sce alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Conditionnement et conséquences...

- Soit A, non négligeable, $\mathbf{P}_A : B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ est une probabilité,
- Formule des probabiltiés composées (succession d'expériences élémentaires dépendantes)

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

- Formule des probabilités totales (une (seconde) expérience paramétrée par une famille de résultats d'une première expérience)

(A_i), sce alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$

- Formule de Bayes (Connaissant le résultat d'une seconde expérience, on cherche à obtenir les probabilités des issus d'une première expérience élémentaire.)

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Conditionnement et conséquences...

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

Conclusion

Objectifs

⇒ Conditionnement et conséquences...

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

- Définition : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, elle dépend de $\mathbf{P}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Conditionnement et conséquences...

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

- Définition : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, elle dépend de $\mathbf{P}$
- Autre point de vue A et B indépendants pour $\mathbf{P}$ ssi $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Conditionnement et conséquences...

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

- Définition : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, elle dépend de $\mathbf{P}$
- Autre point de vue A et B indépendants pour $\mathbf{P}$ ssi $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$
- Plusieurs événements :

Conclusion

Objectifs

⇒ Conditionnement et conséquences...

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

- Définition : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, elle dépend de $\mathbf{P}$
- Autre point de vue A et B indépendants pour $\mathbf{P}$ ssi $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$
- Plusieurs événements :
  - indépendance 2 à 2 : $\forall\ i \neq j$, A_i et A_j indépendants

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences…

$\Rightarrow$ Evénements indépendants (selon une probabilité)

- Définition : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, elle dépend de $\mathbf{P}$
- Autre point de vue A et B indépendants pour $\mathbf{P}$ ssi $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$
- Plusieurs événements :
  - indépendance 2 à 2 : $\forall\ i \neq j$, A_i et A_j indépendants
  - indépendance mutuelle : $\forall\ I \subset \mathbb{N}_N$, $\mathbf{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Conditionnement et conséquences…

$\Rightarrow$ Evénements indépendants (selon une probabilité)

- Définition : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, elle dépend de $\mathbf{P}$
- Autre point de vue A et B indépendants pour $\mathbf{P}$ ssi $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$
- Plusieurs événements :
  - indépendance 2 à 2 : $\forall\ i \neq j$, A_i et A_j indépendants
  - indépendance mutuelle : $\forall\ I \subset \mathbb{N}_N$, $\mathbf{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$
- Des savoir-faire !

Conclusion

Objectifs

⇒ Conditionnement et conséquences...

⇒ Evénements indépendants (selon une probabilité)

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 36 : Variables aléatoires
- Exercice N° 723& 742
- TD de jeudi
  8h-10h : N° 717, 722, 725, 727, 732, 740   10h-12h : N° 713, 720, 726, 728, 735, 737