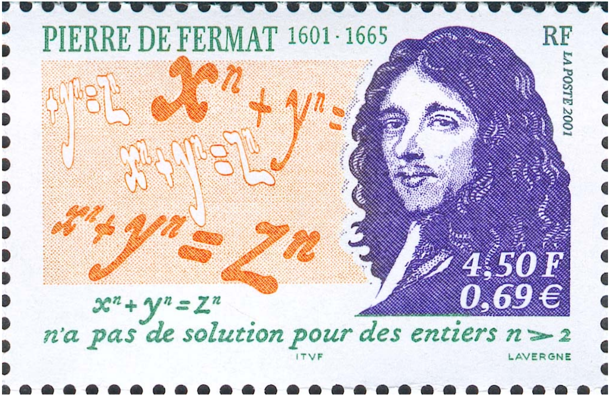

Leçon 90 - Variables aléatoires

2 mai 2025

⇒ Indépendance de variables aléatoires

$\Rightarrow$ Indépendance de variables aléatoires

Indépendance de deux variables

Définition - Indépendance de deux v.a.

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathbf{P})$ sont dites indépendantes si, pour tout couple (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire si
$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$.
On notera $X \perp\!\!\!\perp Y$

Indépendance de deux variables

Définition - Indépendance de deux v.a.

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathbf{P})$ sont dites indépendantes si, pour tout couple (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire si $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$.
On notera $X \perp\!\!\!\perp Y$

C'est une relation symétrique. Elle n'est ni réflexive, ni transitive.

Indépendance de deux variables

Proposition - Caractérisation d'indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathbf{P})$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Indépendance de deux variables

Proposition - Caractérisation d'indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathbf{P})$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(A,B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Démonstration

Lemme de Coalition

Théorème - de Coalition

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P})$, indépendantes.
Alors, pour toutes fonctions f et g, les v.a. (si elles sont bien définies) $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Lemme de Coalition

Théorème - de Coalition

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P})$, indépendantes.
Alors, pour toutes fonctions f et g, les v.a. (si elles sont bien définies) $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration

⇒ Indépendance de variables aléatoires

Définition

Définition - Indépendance mutuelle

Soient n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur (Ω, P). On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, on a

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

c'est-à-dire si les événements $\Big((X_i = x_i)\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.

Indépendance mutuelle

Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ définies sur (Ω,P).
$X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(A_1,\dots,A_n)\subset X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$, les événements $(X_i\in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Indépendance mutuelle

Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ définies sur (Ω,P).
$X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(A_1,\dots,A_n)\subset X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration

Indépendance mutuelle

Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient n variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ définies sur (Ω, P). $X_1,\ldots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(A_1,\ldots,A_n) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration

Proposition - Indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux

n variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sur $(\Omega, \mathbf{P})$ mutuellement indépendantes sont indépendantes deux à deux.

Indépendance mutuelle

Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ définies sur (Ω,P). $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(A_1,\dots,A_n)\subset X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$, les événements $(X_i\in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration

Proposition - Indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux

n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sur $(\Omega,\mathbf{P})$ mutuellement indépendantes sont indépendantes deux à deux.

Démonstration

Coalitions à n variables

Théorème - Coalitions (n variables)

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires définies sur (Ω, P) mutuellement indépendantes. Alors :

- pour toutes fonctions $g_1, \dots, g_n$, les v.a. (si elles sont bien définies) $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes ;
- pour toutes fonctions φ et ψ, les deux variables aléatoires (si elles sont définies) $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_p)$ et $\psi(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes ;
- plus généralement si $Y_1, \dots, Y_k$ sont k variables aléatoires telles que Y_i soit fonction des X_j pour $j \in J_i$, avec les ensembles J_i deux à deux disjoints, alors $Y_1, \dots, Y_k$ sont mutuellement indépendantes.

Coalitions à n variables

Théorème - Coalitions (n variables)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires définies sur (Ω, P) mutuellement indépendantes. Alors :

- pour toutes fonctions $g_1, \ldots, g_n$, les v.a. (si elles sont bien définies) $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes ;
- pour toutes fonctions φ et ψ, les deux variables aléatoires (si elles sont définies) $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ et $\psi(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes ;
- plus généralement si $Y_1, \ldots, Y_k$ sont k variables aléatoires telles que Y_i soit fonction des X_j pour $j \in J_i$, avec les ensembles J_i deux à deux disjoints, alors $Y_1, \ldots, Y_k$ sont mutuellement indépendantes.

On ne fait pas la première démonstration, il suffit d'apter le cas de deux variables. On ne fait pas non plus la dernière, très pénible.

Démonstration

Démonstration

Démonstration

Démonstration

Exemple Une pièce qui n'en finit pas d'être tirée

On considère une pièce que l'on lance infiniment, elle retombe avec une probabilité p sur pile et $q = 1 - p$ sur face.

On note X, la v.a.r. qui mesure le première fois que l'on obtient pile.

On note Y, la v.a.r. qui mesure le seconde fois que l'on obtient pile.

On considère que les résultats des lancers sont indépendants les uns les autres (modélisation).

Chercher la loi conjointe et les lois de chacune des v.a.r.

Ces deux lois sont-elles indépendantes ?

Démonstration

Démonstration

Exemple Une pièce qui n'en finit pas d'être tirée

On considère une pièce que l'on lance infiniment, elle retombe avec une probabilité p sur pile et $q = 1 - p$ sur face.

On note X, la v.a.r. qui mesure le première fois que l'on obtient pile.

On note Y, la v.a.r. qui mesure le seconde fois que l'on obtient pile.

On considère que les résultats des lancers sont indépendants les uns les autres (modélisation).

Chercher la loi conjointe et les lois de chacune des v.a.r.

Ces deux lois sont-elles indépendantes ?

On considère avec le même modèle, non plus (X,Y) mais le couple (X,Z),

où Z indique le nombre de lancers supplémentaires pour obtenir le second pile.

⇒ Indépendance de variables aléatoires

Stabilité binomiale

Théorème - Stabilité de la loi binomiale pour la somme

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini.

- Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes sur (Ω, P) telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$, alors $X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. mutuellement indépendantes sur (Ω, P) telles que pour tout i, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n_i, p)$, alors $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^n n_i, p\right)$.

Stabilité binomiale

Théorème - Stabilité de la loi binomiale pour la somme

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini.

- Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes sur (Ω, P) telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$, alors $X + Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. mutuellement indépendantes sur (Ω, P) telles que pour tout i, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n_i, p)$, alors $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^n n_i, p\right)$.

La loi de Bernoulli étant un cas particulier de la loi binomiale $(n = 1)$, on a

Corollaire - Addition de Bernoulli

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$, toutes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Modélisation

Attention - Le même coefficient p

On soulignera qu'il faut que ce soit la même probabilité p en paramètre aux lois additionnées

Modélisation

Attention - Le même coefficient p

On soulignera qu'il faut que ce soit la même probabilité p en paramètre aux lois additionnées

Démonstration

Modélisation

Attention - Le même coefficient p

On soulignera qu'il faut que ce soit la même probabilité p en paramètre aux lois additionnées

Démonstration

Savoir-faire. Modélisation

Une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes fournit un moyen de modéliser une succession de n épreuves dont les résultats sont indépendants, en particulier les répétitions indépendantes d'une même épreuve se modélisent par la donnée de n v.a. indépendantes **équidistribuées** (c'est-à-dire de même loi).
Une suite de n lancers de pile ou face aux résultats indépendants se modélise par la donnée de n v.a. indépendantes $X_1,\ldots,X_n$ de loi $\mathscr{B}(p)$, X_i étant le résultat du i-ième lancer.

Exercice

Exercice

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-uplet de v.a.r. indépendantes de même loi $\mathscr{B}(100,\frac{1}{5})$.
On note N la variable aléatoire égale à $\mathrm{Card}\{k \in [\![1,n]\!] \,|\, X_k = 99\}$. Déterminer la loi de N.

Exercice

Exercice

Une urne contient n boules indiscernables numérotées de 1à n.
On prélève deux boules successivement et on note X_1 (resp. X_2) la valeur du numéro de la première boule tirée (resp. deuxième).
On note $Z = \max(X_1, X_2)$.
Déterminer la loi du couple (X_1, X_2), les lois marginales, ainsi que la loi de Z dans les deux cas suivants :

- le tirage se fait avec remise
- le tirage se fait sans remise

Savoir faire pour le $\max$

Truc et Astuce pour le calcul. Etude du $\max(X_i)$, où les X_i sont indépendantes

On note $Z = \max(X_1, X_2, \dots X_n)$. En deux temps :

1. On constate que $Z \leqslant k \iff \forall\ i \leqslant n, X_i \leqslant k$.

   Par indépendance : $\mathbf{P}(Z \leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \leqslant k)$
2. Revenir au cas $Z = k$:

   $[Z \leqslant k] = [Z = k] \cup [Z \leqslant k-1]$, événements incompatibles,

   Donc $\mathbf{P}(Z \leqslant k) = \mathbf{P}(Z = k) + \mathbf{P}(Z \leqslant k-1)$,

   et $\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z \leqslant k) - \mathbf{P}(Z \leqslant k-1)$

Savoir faire pour le $\max$

Truc et Astuce pour le calcul. Etude du $\max(X_i)$, où les X_i sont indépendantes

On note $Z = \max(X_1, X_2, \ldots X_n)$. En deux temps :

1. On constate que $Z \leqslant k \iff \forall\ i \leqslant n, X_i \leqslant k$.

   Par indépendance : $\mathbf{P}(Z \leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \leqslant k)$
2. Revenir au cas $Z = k$:

   $[Z \leqslant k] = [Z = k] \cup [Z \leqslant k-1]$, événements incompatibles,

   Donc $\mathbf{P}(Z \leqslant k) = \mathbf{P}(Z = k) + \mathbf{P}(Z \leqslant k-1)$,

   et $\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z \leqslant k) - \mathbf{P}(Z \leqslant k-1)$

<u>Exercice</u>

Retrouver la loi de Z de l'exercice précédent.

⇒ Indépendance de variables aléatoires

Indépendance pour une suite

Définition - Indépendance pour une suite de v.a.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$.
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. mutuellement indépendantes si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Indépendance pour une suite

Définition - Indépendance pour une suite de v.a.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$.
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. mutuellement indépendantes si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Nous reviendrons plus loin sur cette notion de suite de variables aléatoires.
Elle est très importante en probabilité (et analyse) mais *relativement* hors programme.

Conclusion

Objectifs

⇒ Indépendance

Conclusion

Objectifs

⇒ Indépendance

- X et Y sont indépendantes si $\forall\ (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Indépendance

- X et Y sont indépendantes si $\forall\ (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$
- de manière équivalente : ssi $\forall\ (A,B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Indépendance

- X et Y sont indépendantes si $\forall\ (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$
- de manière équivalente : ssi $\forall\ (A,B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
- Lemme des coalition : Si X et Y sont indépendantes, alors,$\forall\ f$ et g, les v.a. , $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Conclusion

Objectifs

⇒ Indépendance

- X et Y sont indépendantes si $\forall\ (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$,
  $\mathbf{P}(X=x, Y=y) = \mathbf{P}(X=x)\times\mathbf{P}(Y=y)$
- de manière équivalente : ssi $\forall\ (A,B) \subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
- Lemme des coalition : Si X et Y sont indépendantes, alors,$\forall\ f$ et g, les v.a. , $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Indépendance mutuelle

Conclusion

Objectifs

⇒ Indépendance

- X et Y sont indépendantes si $\forall\ (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(X=x, Y=y) = \mathbf{P}(X=x)\times\mathbf{P}(Y=y)$
- de manière équivalente : ssi $\forall\ (A,B) \subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$, les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.
- Lemme des coalition : Si X et Y sont indépendantes, alors,$\forall\ f$ et g, les v.a. , $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Indépendance mutuelle
- Lemme des coalitions généralisés.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Indépendance

Pour le prochain cours

- Lecture : 5. Moments
- Exercice n°760 & 763
- TD :
  mardi 16h-18h : N° 751, 750, 752, 759, 756
  mercredi 16h-18h : N° 753, 752, 754, 761, 764