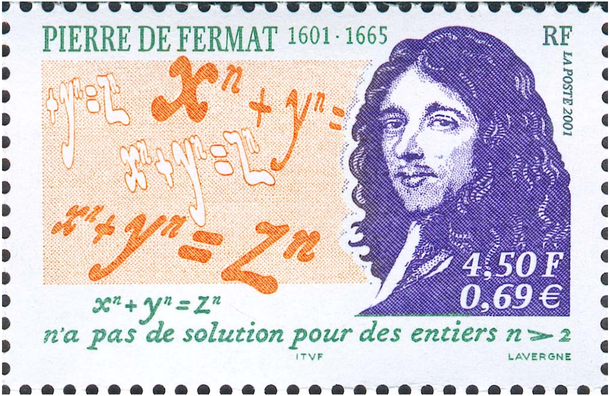

Leçon 91 - Variables aléatoires

3 mai 2025

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   5.1. Espérance
   5.2. Variance
   5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

    5.1. Espérance

    5.2. Variance

    5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Espérance - définition

$(\Omega, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

Définition - Espérance. Loi centrée

Soit X une v.a.réelle, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
On appelle **espérance** de X le réel noté $\mathbf{E}(X)$ défini par :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x)$$

X est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Lois usuelles

Proposition - Espérance des lois usuelles

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini

- si X est constante égale à a alors $\mathbf{E}(X) = a$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbf{E}(X) = p$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ alors $\mathbf{E}(X) = np$.

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Lois usuelles

Proposition - Espérance des lois usuelles

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini

- si X est constante égale à a alors $\mathbf{E}(X) = a$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbf{E}(X) = p$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbf{E}(X) = np$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Lois usuelles

Proposition - Espérance des lois usuelles

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini

- si X est constante égale à a alors $\mathbf{E}(X) = a$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbf{E}(X) = p$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbf{E}(X) = np$.

Démonstration

Savoir-faire. Exploitation d'indicatrice (2)

Si $A \subset \Omega$ est un événement, alors $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbf{P}(A))$ et donc $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.
On exploitera cette relation associée à des propriétés essentielles de l'espérance (linéarité...).

Formule de transfert

Proposition - Formulation équivalente

Soit X une v.a.r. On a $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$.

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Formule de transfert

Proposition - Formulation équivalente

Soit X une v.a.r. On a $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$.

On peut aussi noter que, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots x_p\}$,

$$X = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbb{1}_{[X=x_i]}$$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Formule de transfert

Proposition - Formulation équivalente

Soit X une v.a.r. On a $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$.

On peut aussi noter que, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots x_p\}$,

$$X = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbb{1}_{[X=x_i]}$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   5.1. Espérance
   5.2. Variance
   5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Formule de transfert

Théorème - Formule de transfert

Soient X une v.a. définie sur Ω, à valeurs dans un ensemble E et $g : X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \to \mathbb{R}$.
Alors l'espérance de la v.a.r. $Z = g(X)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbf{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbf{P}(X = x)$$

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Formule de transfert

Théorème - Formule de transfert

Soient X une v.a. définie sur Ω, à valeurs dans un ensemble E et $g : X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{R}$.
Alors l'espérance de la v.a.r. $Z = g(X)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbf{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbf{P}(X = x)$$

C'est-à-dire que l'on n'a pas besoin de connaître la loi de Z pour calculer son espérance, la loi de X suffit.

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Formule de transfert

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Théorème - Formule de transfert

Soient X une v.a. définie sur Ω, à valeurs dans un ensemble E et $g : X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{R}$.
Alors l'espérance de la v.a.r. $Z = g(X)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbf{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbf{P}(X = x)$$

C'est-à-dire que l'on n'a pas besoin de connaître la loi de Z pour calculer son espérance, la loi de X suffit.

Démonstration

Corollaires

Corollaire - Application : pseudo-linéarité

Soient X une v.a.r., a et b deux réels. Alors
$\mathbf{E}(aX+b) = a\mathbf{E}(X)+b$.
En particulier $X-\mathbf{E}(X)$ est une v.a. centrée (appelée v.a. centrée associée à X).

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Corollaires

Corollaire - Application : pseudo-linéarité

Soient X une v.a.r., a et b deux réels. Alors $\mathbf{E}(aX+b) = a\mathbf{E}(X)+b$.
En particulier $X - \mathbf{E}(X)$ est une v.a. centrée (appelée v.a. centrée associée à X).

Démonstration

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   5.1. Espérance
   5.2. Variance
   5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Corollaires

Corollaire - Application : pseudo-linéarité

Soient X une v.a.r., a et b deux réels. Alors $\mathbf{E}(aX+b)=a\mathbf{E}(X)+b$.
En particulier $X-\mathbf{E}(X)$ est une v.a. centrée (appelée v.a. centrée associée à X).

Démonstration

Corollaire - Espérance de couple

Soient (X,Y) un couple de v.a. définies sur Ω et $g:(X,Y)(\Omega)\to\mathbb{R}$.
Alors l'espérance de la v.a.r. $g(X,Y)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(g(X,Y))=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} g(x,y)\mathbf{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)$$

Corollaires

Corollaire - Application : pseudo-linéarité

Soient X une v.a.r., a et b deux réels. Alors
$\mathbf{E}(aX+b) = a\mathbf{E}(X)+b$.
En particulier $X-\mathbf{E}(X)$ est une v.a. centrée (appelée v.a. centrée associée à X).

Démonstration

Corollaire - Espérance de couple

Soient (X,Y) un couple de v.a. définies sur Ω et
$g:(X,Y)(\Omega)\to\mathbb{R}$.
Alors l'espérance de la v.a.r. $g(X,Y)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} g(x,y)\mathbf{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Corollaires

Corollaire - Application : pseudo-linéarité

Soient X une v.a.r., a et b deux réels. Alors
$\mathbf{E}(aX+b) = a\mathbf{E}(X)+b$.
En particulier $X-\mathbf{E}(X)$ est une v.a. centrée (appelée v.a. centrée associée à X).

Démonstration

Corollaire - Espérance de couple

Soient (X,Y) un couple de v.a. définies sur Ω et $g:(X,Y)(\Omega)\to\mathbb{R}$.
Alors l'espérance de la v.a.r. $g(X,Y)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} g(x,y)\mathbf{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)$$

Démonstration

On peut généraliser la formule à une v.a. du type $g(X_1,\cdots,X_n)$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Propriétés (d'intégrale)

Proposition - Propriétés

Si X et Y sont deux v.a.r. (plus généralement si $X_1, \cdots, X_n$ sont n v.a.r) définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.
Alors :

i) $\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)$ (linéarité de l'espérance)

ii) si $X \geqslant 0$ p.s. alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$ (positivité de l'espérance)

iii) si $X \geqslant 0$ p.s. et $\mathbf{E}(X) = 0$ alors $X = 0$ p.s.

iv) si $X \leqslant Y$ p.s. alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$ (croissance)

v) si X, Y sont indépendantes, $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$

vi) $\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \cdots + \mathbf{E}(X_n)$

vii) si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, $\mathbf{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2) \cdots \mathbf{E}(X_n)$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Propriétés (d'intégrale)

Proposition - Propriétés

Si X et Y sont deux v.a.r. (plus généralement si $X_1, \cdots, X_n$ sont n v.a.r) définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.
Alors :

i) $\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)$ (linéarité de l'espérance)

ii) si $X \geqslant 0$ p.s. alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$ (positivité de l'espérance)

iii) si $X \geqslant 0$ p.s. et $\mathbf{E}(X) = 0$ alors $X = 0$ p.s.

iv) si $X \leqslant Y$ p.s. alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$ (croissance)

v) si X, Y sont indépendantes, $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$

vi) $\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \cdots + \mathbf{E}(X_n)$

vii) si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, $\mathbf{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2) \cdots \mathbf{E}(X_n)$

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Applications

Remarque Espérance d'une loi binomiale

Applications

Remarque Espérance d'une loi binomiale

<u>Exercice</u>

Faites le calcul

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Inégalité de Markov

Proposition - Inégalité de Markov

Toute v.a.r. positive sur Ω fini vérifie l'inégalité :

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   - 5.1. Espérance
   - 5.2. Variance
   - 5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Inégalité de Markov

Proposition - Inégalité de Markov

Toute v.a.r. positive sur Ω fini vérifie l'inégalité :

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

Savoir-faire. Exploitation d'indicatrice (3)

Il y a un événement naturel à étudier ici : $A = [X \geqslant x]$, puis on exploite la propriété de l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Inégalité de Markov

Proposition - Inégalité de Markov

Toute v.a.r. positive sur Ω fini vérifie l'inégalité :

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

Savoir-faire. Exploitation d'indicatrice (3)

Il y a un événement naturel à étudier ici : $A = [X \geqslant x]$, puis on exploite la propriété de l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   5.1. Espérance
   5.2. Variance
   5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Exercices

Exercice

Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{P}(X = 0) \geqslant 1 - \mathbf{E}(X)$.

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Exercices

Exercice

Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{P}(X = 0) \geqslant 1 - \mathbf{E}(X)$.

Savoir-faire. Composition avec exp (Chernoff)

Il arrive fréquemment qu'on compose avec $\exp$ la variable X. On parle de comparaison avec des vecteurs sous-gaussiens.

On a alors $\mathbf{P}(X \geqslant x) = \mathbf{P}(e^X \geqslant e^x) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(e^X)}{e^x}$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Exercices

Exercice

Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{P}(X=0) \geqslant 1-\mathbf{E}(X)$.

Savoir-faire. Composition avec exp (Chernoff)

Il arrive fréquemment qu'on compose avec $\exp$ la variable X. On parle de comparaison avec des vecteurs sous-gaussiens.

On a alors $\mathbf{P}(X \geqslant x) = \mathbf{P}(e^X \geqslant e^x) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(e^X)}{e^x}$.

Exercice

Soit $X : \Omega \to \{-2,-1,0,1,2\}$ telle que

$\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=-1) = p_1$ et $\mathbf{P}(X=2) = \mathbf{P}(X=-2) = p_2$.

Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(X \geqslant \epsilon) \leqslant (2p_2(\mathrm{ch}2-1)+2p_1(\mathrm{ch}1-1)+1)e^{-\epsilon}$$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Moments

Définition - Moment d'ordre r

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. On appelle **moment d'ordre r** **($r \in \mathbb{N}$)** de X le réel $m_r(X) = \mathbf{E}(X^r)$ et **moment centré d'ordre r** de X le réel $m_r(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^r]$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Moments

Définition - Moment d'ordre r

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. On appelle **moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$)** de X le réel $m_r(X) = \mathbf{E}(X^r)$ et **moment centré d'ordre r** de X le réel $m_r(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^r]$.

Savoir-faire. Formulation calculatoire (transfert)

Si X est centrée : $m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbf{P}(X = x)$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Variance et écart-type

Définition - Variance et écart-type

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. On appelle **variance** de X, notée $\mathbf{V}(X)$, le moment centré d'ordre 2 de X : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\Big((X - \mathbf{E}(X))^2\Big)$.

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ est appelé **écart-type** de X.

Si $\sigma(X) = 1$ on dit que X est **réduite**.

Variance et écart-type

Définition - Variance et écart-type

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. On appelle **variance** de X, notée $\mathbf{V}(X)$, le moment centré d'ordre 2 de X : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\Big((X - \mathbf{E}(X))^2\Big)$.
$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ est appelé **écart-type** de X.
Si $\sigma(X) = 1$ on dit que X est **réduite**.

Remarque Positivité de la variance.

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   5.1. Espérance
   5.2. Variance
   5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Variance et écart-type

Définition - Variance et écart-type

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. On appelle **variance** de X, notée $\mathbf{V}(X)$, le moment centré d'ordre 2 de X : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\Big((X - \mathbf{E}(X))^2\Big)$.
$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ est appelé **écart-type** de X.
Si $\sigma(X) = 1$ on dit que X est **réduite.**

Remarque Positivité de la variance.

Savoir-faire. Formulation calculatoire (transfert)

On a donc $\mathbf{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = x)$.

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Propriétés

Proposition - Propriétés

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini. Alors

i) $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ formule de Huygens

ii) $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$

iii) $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

iv) si $\sigma(X) > 0$, $X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, on l'appelle **v.a. centrée réduite associée** à X

v) $\mathbf{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque sûrement

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Propriétés

Proposition - Propriétés

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini. Alors

i) $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ formule de Huygens

ii) $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$

iii) $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

iv) si $\sigma(X) > 0$, $X^* = \frac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, on l'appelle **v.a. centrée réduite associée** à X

v) $\mathbf{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque sûrement

Exemple Variance de la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Propriétés

Proposition - Propriétés

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini. Alors

i) $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ formule de Huygens

ii) $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$

iii) $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

iv) si $\sigma(X) > 0$, $X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, on l'appelle **v.a. centrée réduite associée** à X

v) $\mathbf{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque sûrement

Exemple Variance de la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Lois usuelles

Proposition - Variance des lois usuelles

- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   5.1. Espérance
   5.2. Variance
   5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Lois usuelles

Proposition - Variance des lois usuelles

- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Lois usuelles

Proposition - Variance des lois usuelles

- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$;
- si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.

Démonstration

Remarque A propos de la loi hypergéométrique

Exercice

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Exercice

Une urne contient N boules, de deux catégories : des blanches en proportion p et des non blanches en proportion $q = 1 - p$ ($Np \in \mathbb{N}$ désigne donc le nombre de boules blanches et $Nq \in \mathbb{N}$ celui de non blanches).
On tire successivement n boules de cette urne **sans remise** et on note X la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenues.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance (on pourra, pour cette dernière, commencer par calculer $\mathbf{E}(X(X-1))$).

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. Alors :

$$\forall\ \epsilon > 0, \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$$

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   - 5.1. Espérance
   - 5.2. Variance
   - 5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. Alors :

$$\forall\ \epsilon > 0, \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$$

Démonstration

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. Alors :

$$\forall\ \epsilon > 0, \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$$

Démonstration

Exercice

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières.

Montrer que $\mathbf{P}(X = 0) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{(\mathbf{E}(X))^2}$.

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

   5.1. Espérance

   5.2. Variance

   5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Covariance (définition)

Définition - Covariance

Soient X, Y deux v.a.r sur (Ω, P) fini. On appelle **covariance** de X et Y le réel :

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big)\big(Y - \mathbf{E}(Y)\big)\Big)$$

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Covariance (définition)

Définition - Covariance

Soient X, Y deux v.a.r sur (Ω, P) fini. On appelle **covariance** de X et Y le réel :

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big)\big(Y - \mathbf{E}(Y)\big)\Big)$$

Exemple - Application

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Covariance (propriétés)

Proposition - Propriétés de la covariance

Soient X, X', Y, Y' des v.a.r. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini et $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$. On a

i) $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$

ii) $\mathbf{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\mathbf{Cov}(X,Y)$

iii) $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{Cov}(Y,X)$

iv) $\mathbf{Cov}(X,X) = \mathbf{V}(X)$

v) $\mathbf{Cov}(X+X',Y) = \mathbf{Cov}(X,Y) + \mathbf{Cov}(X',Y)$ et
$\mathbf{Cov}(\lambda X, Y) = \lambda\mathbf{Cov}(X,Y)$
$\mathbf{Cov}(X, Y+Y') = \mathbf{Cov}(X,Y) + \mathbf{Cov}(X,Y')$ et
$\mathbf{Cov}(X, \lambda Y) = \lambda\mathbf{Cov}(X,Y)$

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Démonstration

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Produit scalaire ?

Remarque $\mathbf{Cov}$ comme un produit scalaire

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Produit scalaire ?

Remarque $\mathbf{Cov}$ comme un produit scalaire
Si les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes :

Théorème - Lien variance-covariance

Pour des v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini, on a

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)$$

$$\mathbf{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)+\cdots+\mathbf{V}(X_n)+2\sum_{i<j}\mathbf{Cov}(X_i,X_j)$$

$$= \sum_{i,j}\mathbf{Cov}(X_i,X_j)$$

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Produit scalaire ?

Remarque $\mathbf{Cov}$ comme un produit scalaire
Si les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes :

Théorème - Lien variance-covariance

Pour des v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$ fini, on a

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)$$

$$\mathbf{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)+\cdots+\mathbf{V}(X_n)+2\sum_{i<j}\mathbf{Cov}(X_i,X_j)$$

$$= \sum_{i,j}\mathbf{Cov}(X_i,X_j)$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Avec indépendance

Théorème - Cas d'indépendance

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes** (plus généralement si $X_1, \cdots, X_n$ sont n v.a. **deux à deux indépendantes**) définies sur un même espace probabilisé fini. Alors :

i) $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$ (on dit que X et Y sont **non corrélées**)

ii) $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$

iii) $\mathbf{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)+\cdots+\mathbf{V}(X_n)$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Avec indépendance

Théorème - Cas d'indépendance

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes** (plus généralement si $X_1, \cdots, X_n$ sont n v.a. **deux à deux indépendantes**) définies sur un même espace probabilisé fini. Alors :

i) $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$ (on dit que X et Y sont **non corrélées**)

ii) $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$

iii) $\mathbf{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)+\cdots+\mathbf{V}(X_n)$

D'une certaine façon, deux variables aléatoires non corrélées sont orthogonales pour le pseudo-produit scalaire $\mathbf{Cov}$ d'ioù la notation :

Définition - Variables non corrélées (notations)

Si X et Y sont deux variables aléatoires non corrélées (i.e. $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$), on note $X \perp Y$. On a donc $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow X \perp Y$

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Avec indépendance

Théorème - Cas d'indépendance

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes** (plus généralement si $X_1, \cdots, X_n$ sont n v.a. **deux à deux indépendantes**) définies sur un même espace probabilisé fini. Alors :

i) $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$ (on dit que X et Y sont **non corrélées**)

ii) $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$

iii) $\mathbf{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)+\cdots+\mathbf{V}(X_n)$

D'une certaine façon, deux variables aléatoires non corrélées sont orthogonales pour le pseudo-produit scalaire $\mathbf{Cov}$ d'ioù la notation :

Définition - Variables non corrélées (notations)

Si X et Y sont deux variables aléatoires non corrélées (i.e. $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$), on note $X \perp Y$. On a donc $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow X \perp Y$

Démonstration

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Applications

Remarque Variance d'une binomiale

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Applications

Remarque Variance d'une binomiale

Attention. La réciproque est fausse.

Cela signifie que deux var peuvent avoir une covariance nulle (ou plus loin un coefficient de corrélation linéaire), sans être indépendantes.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Applications

Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli et telles que la loi conjointe est donnée par le tableau :

$Y \backslash X$	0	1
0	a	b
1	c	d

1. Calculer la $\mathbf{Cov}(X,Y)$.
2. Montrer : (X,Y) sont indépendantes ssi la matrice est de rang 1.
   En déduire que si (X,Y) sont indépendantes, il existe $\lambda,\mu > 0$ tel que $b = \lambda d$, $c = \lambda d$ et $a = \lambda\mu d$.
   Calculer $\mathbf{Cov}(X,Y)$
3. Montrer que dans ce cas $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Coefficient de corrélation linéaire

Analyse Inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Coefficient de corrélation linéaire

Analyse Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition - Coefficient de corrélation linéaire

Soient X et Y deux v.a. d'écart type non nul. On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y le réel

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Coefficient de corrélation linéaire

Analyse Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition - Coefficient de corrélation linéaire

Soient X et Y deux v.a. d'écart type non nul. On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y le réel
$\rho(X,Y) = \dfrac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Proposition - Propriétés

$|\rho(aX+b, cY+d)| = |\rho(X,Y)|$.
On a toujours $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$, c'est-à-dire
$|\mathbf{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.
Et : $|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si il existe a et b réels tels que $Y = aX+b$ presque sûrement, c'est-à-dire tels que $\mathbf{P}(Y = aX+b) = 1$.

Coefficient de corrélation linéaire

Analyse Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition - Coefficient de corrélation linéaire

Soient X et Y deux v.a. d'écart type non nul. On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y le réel
$\rho(X,Y) = \dfrac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Proposition - Propriétés

$|\rho(aX+b,cY+d)| = |\rho(X,Y)|$.
On a toujours $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$, c'est-à-dire $|\mathbf{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.
Et : $|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si il existe a et b réels tels que $Y = aX+b$ presque sûrement, c'est-à-dire tels que $\mathbf{P}(Y = aX+b) = 1$.

Démonstration

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Lois usuelles

Savoir-faire. Tableau récapitulatif

On considère p un réel de l'intervalle $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.

nom	$X(\Omega)$	loi	espérance	variance
v.a constante (certaine)	$\{a\}$	$P(X=a)=1$	a	0
loi uniforme sur $\{1,2,\cdots n\}$ $\mathscr{U}_n$	$\{1,2,\cdots n\}$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
loi de Bernoulli de paramètre p $\mathscr{B}_p$ ou $\mathscr{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=q$ $P(X=1)=p$	p	pq
loi binomiale de paramètres n,p $\mathscr{B}(n,p)$	$\{0,1,2,\cdots n\}$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	npq

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Espérance

$\Rightarrow$ Variance & Covariance

$\Rightarrow$ Espérance
$\Rightarrow$ Variance & Covariance

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Espérance

- Définition :
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}$$

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Espérance

- Définition :
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}$$
- Par transfert : $\mathbf{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

- Définition : $\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}$
- Par transfert : $\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$
- Cas classiques : $X \hookrightarrow a$ p.s., alors $\mathbf{E}(X) = a$
  $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ alors $\mathbf{E}(X) = np$

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

- Définition :
  $$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$$
- Par transfert : $\mathbf{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$
- Cas classiques : $X \hookrightarrow a$ p.s., alors $\mathbf{E}(X) = a$
  $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbf{E}(X) = np$
- Propriétés essentielles :
  - Linéarité : $\mathbf{E}(aX + Y) = a\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$
  - Produit : $\mathbf{E}(X \times Y) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ si $X \perp\!\!\!\perp Y$.
  - Inégalités : $X \geqslant Y$ p.s. alors $\mathbf{E}(X) \geqslant \mathbf{E}(Y)$ (croissance)
  - si $X \geqslant 0$ (p.s.), $\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(X)}{a}$ (Markov)

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Espérance

$\Rightarrow$ Variance & Covariance

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ & $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Espérance

$\Rightarrow$ Variance & Covariance

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ & $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$
- Propriétés : $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$ ou $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi $X = c$ p.s. .

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   - 5.1. Espérance
   - 5.2. Variance
   - 5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ & $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$
- Propriétés : $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$ ou $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi $X = c$ p.s. .
- Variance d'une binomiale : si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ & $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$
- Propriétés : $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$ ou $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi $X = c$ p.s. .
- Variance d'une binomiale : si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| > \epsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Espérance

$\Rightarrow$ Variance & Covariance

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ & $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$
- Propriétés : $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$ ou $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi $X = c$ p.s. .
- Variance d'une binomiale : si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| > \epsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$
- Plusieurs variable aléatoire : $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}[(X_1 - \mathbf{E}(X_1))(X_2 - \mathbf{E}(X_2))] = \mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

5.1. Espérance

5.2. Variance

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ & $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$
- Propriétés : $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$ ou $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi $X = c$ p.s. .
- Variance d'une binomiale : si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| > \epsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$
- Plusieurs variable aléatoire : $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) =$ $\mathbf{E}[(X_1 - \mathbf{E}(X_1))(X_2 - \mathbf{E}(X_2))] = \mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)$.
- Si X_1 et X_2 indépendantes, alors $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = 0$

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
   5.1. Espérance
   5.2. Variance
   5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ & $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$
- Propriétés : $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$ ou $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi $X = c$ p.s. .
- Variance d'une binomiale : si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbf{P}(|X-\mathbf{E}(X)| > \epsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$
- Plusieurs variable aléatoire : $\mathbf{Cov}(X_1,X_2) = \mathbf{E}[(X_1-\mathbf{E}(X_1))(X_2-\mathbf{E}(X_2))] = \mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)$.
- Si X_1 et X_2 indépendantes, alors $\mathbf{Cov}(X_1,X_2) = 0$
- Alors : $\mathbf{V}(\sum_i X_i) = \sum_{i,j} \mathbf{Cov}(X_i,X_j) = \sum_i \mathbf{V}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathbf{Cov}(X_i,X_j)$.
  (*Lien avec les produits scalaires...*

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ & $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$
- Propriétés : $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$ ou $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi $X = c$ p.s. .
- Variance d'une binomiale : si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| > \epsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$
- Plusieurs variable aléatoire : $\mathbf{Cov}(X_1,X_2) = \mathbf{E}[(X_1 - \mathbf{E}(X_1))(X_2 - \mathbf{E}(X_2))] = \mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)$.
- Si X_1 et X_2 indépendantes, alors $\mathbf{Cov}(X_1,X_2) = 0$
- Alors :
  $\mathbf{V}(\sum_i X_i) = \sum_{i,j} \mathbf{Cov}(X_i,X_j) = \sum_i \mathbf{V}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathbf{Cov}(X_i,X_j)$.
  (*Lien avec les produits scalaires...*
- La corrélation est comprise entre -1 et 1 : $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathbf{Cov}(X_1,X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)}$

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)

Conclusion

Objectifs

⇒ Espérance

⇒ Variance & Covariance

Pour le prochain cours

- Exercice n° 762 & 765

⇒ Espérance
⇒ Variance & Covariance
1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie
5.1. Espérance
5.2. Variance
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)