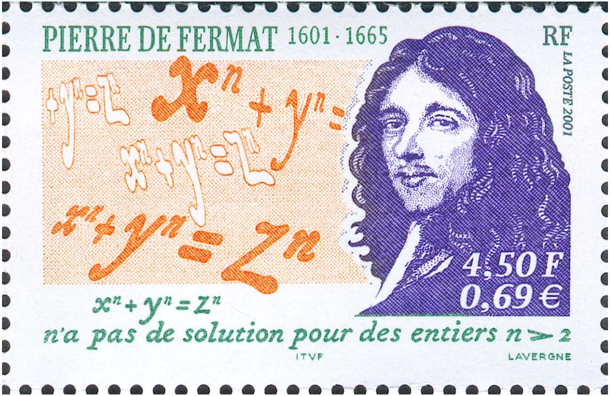

Leçon 89 - Variables aléatoires

30 avril 2025

Problèmes

Problème Variable aléatoire

Problèmes

Problème Variable aléatoire

Problème Lois de probabilités fréquemment rencontrées

Problèmes

Problème Variable aléatoire

Problème Lois de probabilités fréquemment rencontrées

Problème Espérance, variance...

Problèmes

Problème Citation de Poincaré

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

Problèmes

Problème Citation de Poincaré

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

Problème Deux variables aléatoires

Problèmes

Problème Citation de Poincaré

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

Problème Deux variables aléatoires

Problème Produit scalaire

Définition

Soit Ω un univers fini lié à une expérience aléatoire.

Définition - Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire (v.a.) sur Ω toute application $X : \Omega \to E$, où E est un ensemble. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.
$X(\Omega)$ désigne donc l'ensemble image, c'est-à-dire les valeurs que prend l'application X. Cet ensemble est ici fini (car Ω fini), on dit alors que X est une v.a. discrète finie.

Stabilité

La stabilité linéaires des applications permet d'affirmer :

Proposition - Stabilité linéaire

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X + Y, XY$ et λX sont des variables aléatoires sur Ω.

Stabilité

La stabilité linéaires des applications permet d'affirmer :

Proposition - Stabilité linéaire

Soient X,Y deux variables aléatoires réelles sur Ω, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X+Y, XY$ et λX sont des variables aléatoires sur Ω.

Proposition - Composition

Soit X une v.a. sur Ω et g une application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans un ensemble E', alors $g \circ X$ est une v.a. sur Ω, notée $g(X)$:

$$g(X) : \begin{array}{ll} \Omega & \to E' \\ \omega & \mapsto g(X(\omega)) \end{array}$$

Stabilité

La stabilité linéaires des applications permet d'affirmer :

Proposition - Stabilité linéaire

Soient X,Y deux variables aléatoires réelles sur Ω, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X+Y, XY$ et λX sont des variables aléatoires sur Ω.

Proposition - Composition

Soit X une v.a. sur Ω et g une application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans un ensemble E', alors $g \circ X$ est une v.a. sur Ω, notée $g(X)$:

$$g(X): \begin{array}{ll} \Omega & \to E' \\ \omega & \mapsto g(X(\omega)) \end{array}$$

Démonstration

Notations

Définition - variable aléatoire constante ou certaine

Si X est une application constante sur Ω, on dit que c'est une variable aléatoire constante ou certaine.

Notations

Définition - variable aléatoire constante ou certaine

Si X est une application constante sur Ω, on dit que c'est une variable aléatoire constante ou certaine.

Définition - Notations

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω.
Alors, pour $A \subset E$, $X^{-1}(A)$ est un événement (car $X^{-1}(A) \in \mathscr{P}(\Omega)$) noté

$$(X \in A) \text{ ou } \{X \in A\} \quad (= X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}).$$

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, pour $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega \leqslant x\},$$
$$(X < x) = X^{-1}(]-\infty, x[),$$
$$(X = x) = X^{-1}(\{x\})$$

de même pour $(X \geqslant x), (X > x), (a \leqslant X \leqslant b)\dots$

Points de vue sur les v.a.

Heuristique. Deux points de vue sur X^{-1}

De manière générale, ce que l'on a c'est une famille d'événement paramétrée par une variable réelle et pour laquelle on cherche des probabilités de réalisation.
Par exemple, on s'intéresse à l'évolution de la température (moyenne ou sur un point du globe) sur 10 ans. On note H, la variable qui indique cette évolution. On sait que $H \in \mathbb{R}$ (même si toutes les valeurs réelles ne sont pas réalistes).
Ce que l'on cherche : la probabilité d'une hausse $\geqslant$ à 2° :
$\mathbf{P}(H \geqslant 2)$.
Il faut donc que l'ensemble $H^{-1}([2, +\infty[)$ soit un événement mesurable en probabilité.
Donc ce qui nous intéresse, dans la pratique, c'est plutôt $H^{-1}(I)$, comme élément de Ω et dont on cherche une probabilité.
On fera bien attention à la manière de lire les expressions mathématiques du type $\mathbf{P}(H = 0)$

Points de vue sur les v.a.

Heuristique. Deux points de vue sur X^{-1}

On a alors deux points de vue

- H est une application et H^{-1} est une application réciproque, en règle générale non bijective, donc une application de l'ensemble des parties de E (ou de $\mathbb{R}$ pour une var) sur l'ensemble des parties de Ω (ou une tribu de Ω).
  C'est le point de vue choisi dans le cours.
- H^{-1} fait la partition de Ω en classes d'équivalence.

$$\omega \mathscr{R}_H \omega' \Longleftrightarrow H(\omega) = H(\omega')$$

De ce point de vue, le théorème suivant sur le système complet d'événements est trivial.

Définition de la loi de probabilité

On se place désormais sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.

Définition - Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. sur Ω. Alors l'application

$$\mathbf{P}_X : \begin{array}{ll} X(\Omega) & \to [0,1] \\ x & \mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{array}$$

s'appelle la loi (de probabilité) de X.

Définition de la loi de probabilité

On se place désormais sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.

Définition - Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. sur Ω. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X : \quad X(\Omega) & \to [0,1] \\ x & \mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{aligned}$$

s'appelle la loi (de probabilité) de X.

Savoir-faire. Définir la loi d'une variable aléatoire

Définir la loi de probabilité d'une v.a. X finie, c'est donc donner $X(\Omega)$ ainsi que les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Définition de la loi de probabilité

On se place désormais sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.

Définition - Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. sur Ω. Alors l'application

$$\mathbf{P}_X : \begin{array}{ll} X(\Omega) & \to [0,1] \\ x & \mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{array}$$

s'appelle la loi (de probabilité) de X.

Savoir-faire. Définir la loi d'une variable aléatoire

Définir la loi de probabilité d'une v.a. X finie, c'est donc donner $X(\Omega)$ ainsi que les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Remarque Notation

$(X = k)$ comme système complet d'événements

Proposition - Variable aléatoire et système complet d'événements

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
Alors la famille $\big((X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à X. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1.$$

$(X = k)$ comme système complet d'événements

Proposition - Variable aléatoire et système complet d'événements

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
Alors la famille $\big((X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à X. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1.$$

Démonstration

Existence d'une v.a. sous contrainte

Proposition - Existence d'une v.a. a priori

Soient E un ensemble fini, $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $p_1, \dots, p_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Alors, si Ω est un ensemble fini tel que $\mathrm{Card}\Omega \geqslant n$,

il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω et une v.a. X définie sur Ω vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbf{P}(X = x_i) = p_i$$

Existence d'une v.a. sous contrainte

Proposition - Existence d'une v.a. a priori

Soient E un ensemble fini, $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $p_1, \ldots, p_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Alors, si Ω est un ensemble fini tel que $\mathrm{Card}\Omega \geqslant n$,

il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω et une v.a. X définie sur Ω vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbf{P}(X = x_i) = p_i$$

Démonstration

Composition

Proposition - Loi d'une fonction de X

Soient X v.a. sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Alors la loi de probabilité de $Y = g(X)$ est donnée par $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \mathbf{P}(X = x) = \sum_{x | g(x) = y} \mathbf{P}(X = x)$$

Composition

Proposition - Loi d'une fonction de X

Soient X v.a. sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Alors la loi de probabilité de $Y = g(X)$ est donnée par $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \mathbf{P}(X = x) = \sum_{x | g(x) = y} \mathbf{P}(X = x)$$

Démonstration

Fonction de répartition

Définition - Fonction de répartition

Soit X une v.a.r sur Ω. L'application $\begin{array}{rccl} F_X : & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbf{P}(X \leqslant x) \end{array}$ s'appelle la fonction de répartition de X ; si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{i | x_i \leqslant x} \mathbf{P}(X = x_i).$$

Fonction de répartition

Définition - Fonction de répartition

Soit X une v.a.r sur Ω. L'application $\begin{array}{llll} F_X : & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbf{P}(X \leqslant x) \end{array}$ s'appelle la fonction de répartition de X ; si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{i | x_i \leqslant x} \mathbf{P}(X = x_i).$$

Exemple Fonction de répartition du $\max$

Fonction de répartition

Définition - Fonction de répartition

Soit X une v.a.r sur Ω. L'application $\begin{array}{rccl} F_X : & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbf{P}(X \leqslant x) \end{array}$ s'appelle la fonction de répartition de X ; si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{i | x_i \leqslant x} \mathbf{P}(X = x_i).$$

Exemple Fonction de répartition du $\max$

<u>Exercice</u>

On lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus. Donner la loi de X, sa fonction de répartition ainsi que la loi de $Y = |X - 7|$.

Loi uniforme

$(\Omega, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

Définition - Loi uniforme

On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme sur $X(\Omega)$ si

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(X(\Omega))}.$$

Dans le cas particulier où $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}_n$ et on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Loi uniforme

$(\Omega, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

Définition - Loi uniforme

On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme sur $X(\Omega)$ si

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(X(\Omega))}.$$

Dans le cas particulier où $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}_n$ et on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Remarque Modèle pour la loi uniforme $\mathscr{U}_n$

Loi de Bernoulli

Définition - Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$, et donc $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Loi de Bernoulli

Définition - Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$, et donc $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Remarque Modèle pour la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$

Loi de Bernoulli

Définition - Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$, et donc $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Remarque Modèle pour la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$

Savoir-faire. Exploitation d'indicatrice (1)

Très souvent, on associera à l'événement $A \subset \Omega$, la variable aléatoire $X = \mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$

Loi binomiale

Définition - Loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit qu'une v.a.r. suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Loi binomiale

Définition - Loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit qu'une v.a.r. suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Remarque Modèle pour la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$

Définition du couple ou 2-uplet

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. On a déjà rencontré cette situation dans le cas du lancer de dés.

Définition - Couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω, à valeurs respectivement dans les ensembles E et F.
L'application

$$\begin{array}{llll} Z: & \Omega & \to E \times F \\ & \omega & \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

est appelée couple de variables aléatoires, c'est donc une v.a. à valeurs dans $E \times F$. On note $Z = (X, Y)$.
On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Si X et Y sont des v.a.r. on parle de couple de v.a.r.

Loi conjointe, lois marginales

Définition - Loi conjointe, lois marginales

On appelle loi conjointe de X et Y la loi du couple $Z = (X,Y)$, c'est-à-dire l'application

$$\begin{array}{llll} \mathbf{P}_{(X,Y)}: & Z(\Omega) & \to [0,1] \\ & (x,y) & \mapsto \mathbf{P}\Big((X,Y) = (x,y)\Big) = \mathbf{P}\Big((X = x) \cap (Y = y)\Big) \end{array}$$

On appelle lois marginales du couple (X,Y) les deux lois de probabilité, respectivement de X et Y.

On a $\mathbf{P}_X : x \mapsto \sum_{Y=y} \mathbf{P}\big((X,Y) = (x,y)\big)$ (et de même pour P_Y).

Loi conjointe, lois marginales

Définition - Loi conjointe, lois marginales

On appelle loi conjointe de X et Y la loi du couple $Z = (X,Y)$, c'est-à-dire l'application

$$\begin{array}{rll} \mathbf{P}_{(X,Y)} : & Z(\Omega) & \to [0,1] \\ & (x,y) & \mapsto \mathbf{P}\Big((X,Y) = (x,y)\Big) = \mathbf{P}\Big((X = x) \cap (Y = y)\Big) \end{array}$$

On appelle lois marginales du couple (X,Y) les deux lois de probabilité, respectivement de X et Y.
On a $\mathbf{P}_X : x \mapsto \sum\limits_{Y=y} \mathbf{P}\big((X,Y) = (x,y)\big)$ (et de même pour P_Y).

Attention. Lien entre les deux lois

A partir de la loi conjointe d'un couple de v.a. on peut déterminer les lois marginales. La réciproque est fausse.

Loi conditionnelle

Définition - Loi conditionnelle

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires.
Pour $x \in X(\Omega)$ fixé tel que $\mathbf{P}(X=x) \neq 0$, on appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ la loi de Y pour la probabilité $\mathbf{P}_{(X=x)}$, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{array}{ll} Y(\Omega) & \to [0,1] \\ y & \mapsto \mathbf{P}(Y=y|X=x) \end{array}$$

De même on peut définir, pour $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y=y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$.

Exercices

Exercice

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Soient X_1 la v.a. qui vaut 1 si le premier jet donne "pile" et 0 sinon, et X_2 la v.a. égale au nombre de "face" obtenu.

Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (X_1,X_2).

Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(X_2 = 1)$.

Exercices

Exercice

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remise et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = X_1$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.
Déterminer la loi conjointe ainsi que les lois marginales du couple (X_1, X_2). Déterminer la loi conjointe ainsi que les lois marginales du couple (X, Y). Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2)$.

Condition nécessaire et suffisante de loi de couple

Proposition - Caractérisation de loi de couple de v.a.

Soient E et F deux ensembles.
$\left\{\left((x_i, y_j), p_{ij}\right) \in (E \times F) \times \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s\right\}$ est la loi d'un couple de v.a. si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!], p_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1.$$

Condition nécessaire et suffisante de loi de couple

Proposition - Caractérisation de loi de couple de v.a.

Soient E et F deux ensembles.
$\left\{\left((x_i, y_j), p_{ij}\right) \in (E \times F) \times \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s\right\}$ est la loi d'un couple de v.a. si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!], p_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1.$$

Démonstration

Généralisation à des n-uplets

Les définitions peuvent se généraliser à des n-uplets de v.a.

Proposition - Vecteur aléatoire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots, E_n$ des ensembles et $X_1, \dots, X_n$ n v.a. sur Ω. La variable aléatoire à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_n$

$$X : \begin{array}{ll} \Omega & \to E \times \cdots \times E_n \\ \omega & \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array}$$

est appelée n-uplet de variables aléatoires noté $X = (X_1, \dots, X_n)$.
On a $X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.
Si les X_i sont des v.a.r. on parle de n-uplet de v.a.r. ou de vecteur aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$.
La loi conjointe de $X_1, \dots, X_n$ est la loi du n-uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ Les lois marginales de $X = (X_1, \dots, X_n)$ sont les n lois de probabilité des v.a. $X_1, \dots, X_n$, elles peuvent se déduire de la loi conjointe.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

$\Rightarrow$ Exemple classique de loi de variables aléatoires

$\Rightarrow$ Couple de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- Deux points de vue

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- Deux points de vue :
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et on s'intéresse aux événements $[X = k] = X^{-1}(\{k\})$ image réciproque de $\{k\} \subset \mathbb{R}$ par X

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- Deux points de vue :
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et on s'intéresse aux événements $[X = k] = X^{-1}(\{k\})$ image réciproque de $\{k\} \subset \mathbb{R}$ par X
  - X crée une partition de Ω

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- Deux points de vue :
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et on s'intéresse aux événements $[X = k] = X^{-1}(\{k\})$ image réciproque de $\{k\} \subset \mathbb{R}$ par X
  - X crée une partition de Ω
- Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- Deux points de vue
- Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles
- La loi de X est la donnée des $\mathbf{P}(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- Deux points de vue
- Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles
- La loi de X est la donnée des $\mathbf{P}(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.
- $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- Deux points de vue
- Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles
- La loi de X est la donnée des $\mathbf{P}(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.
- $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements
- Si $Y = g(X)$ alors $\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{h \mid g(h) = k} \mathbf{P}(X = h)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- Deux points de vue
- Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles
- La loi de X est la donnée des $\mathbf{P}(X=k)$, pour $k \in X(\Omega)$.
- $([X=k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements
- Si $Y = g(X)$ alors $\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{h \mid g(h)=k} \mathbf{P}(X=h)$
- Fonctions de répartitions : $F_X : t \mapsto \mathbf{P}(X \leqslant t)$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

$\Rightarrow$ Exemple classique de loi de variables aléatoires

$\Rightarrow$ Couple de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

- Si toutes las valeurs prises par X sont équiprobables, on dit que X suit une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([1, \#(X(\Omega))])$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

$\Rightarrow$ Exemple classique de loi de variables aléatoires

- Si toutes las valeurs prises par X sont équiprobables,
  on dit que X suit une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([1, \#(X(\Omega))])$.
- Si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ (seulement deux issues vues par X), en notant
  $p = \mathbf{P}(X = 1)$,
  on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

$\Rightarrow$ Exemple classique de loi de variables aléatoires

- Si toutes las valeurs prises par X sont équiprobables, on dit que X suit une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([1, \#(X(\Omega))])$.
- Si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ (seulement deux issues vues par X), en notant $p = \mathbf{P}(X = 1)$, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
- Si X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes ou X compte le nombre de succès lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une même opération élémentaires de probabilité de succès p, on dit que X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

$\Rightarrow$ Exemple classique de loi de variables aléatoires

$\Rightarrow$ Couple de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

- Définition : $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

- Définition : $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$
- Loi conjointe : loi de Z (représentée dans un tableau).
  Lois marginales : lois de X et Y (on exploite souvent la FPT)

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

- Définition : $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$
- Loi conjointe : loi de Z (représentée dans un tableau).
  Lois marginales : lois de X et Y (on exploite souvent la FPT)
- Lois conditionnelles : $\mathbf{P}_{(X=x)}(Y = y)\dots$

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

- Définition : $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$
- Loi conjointe : loi de Z (représentée dans un tableau).
  Lois marginales : lois de X et Y (on exploite souvent la FPT)
- Lois conditionnelles : $\mathbf{P}_{(X=x)}(Y = y)\dots$
- Généralisation à un vecteur de toute taille...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Variables aléatoires

$\Rightarrow$ Exemple classique de loi de variables aléatoires

$\Rightarrow$ Couple de variables aléatoires

Pour le prochain cours

- Lecture : 3. Indépendance
- Exercice n°770 & 778