Neuvième partie

Analyse (2)

Chapitre 37

Intégrale(s) (sur un segment)

Résumé -

Le but de ce chapître est de donner une construction de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Cette construction permet d'obtenir :

— *les propriétés classiques (dont celles admises en TS) de l'intégrale,*
— *de déduire des méthodes de calcul approché*

L'intégration est historiquement liée au calcul d'aire et est antérieure au calcul différentiel. La méthode que l'on va utiliser est une version améliorée de celle utilisée par Riemann vers 1850.

D'autres théories de l'intégration ont ensuite été développées (Lebesgue au XXe siècle) permettant de donner un sens à l'intégrale de fonctions encore plus nombreuses, de fonder la théorie de la mesure et les probabilités. Beaucoup de résultats ici sont hors-programme.

Sommaire

1. Problème

? Problème 161 - Construction d'une intégrale

Comment « construire » une intégrale puissante, c'est-à-dire souple.
Elle doit en particulier permettre de montrer que si f est dérivable sur I,

alors, pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

La construction que nous ferons, répondra positivement à cette question (à l'inverse de l'intégrale proposée dans le programme). En revanche, pour que son utilisation soit plus souple, il faudra en contre-partie un processus de construction plus compliqué...

? Problème 162 - Aire sous la courbe

Dans l'histoire, c'est ARCHIMÈDE qui le premier a fait avancer la notion d'intégrale (attention : la notion de fonctions n'existe réellement que depuis EULER...). Son objectif : donner les formules des aires de différentes surfaces.
Et il n'y a qu'une méthode : *« l'aire est une variable extensive »* diraient les physiciens. On coupe en morceaux une surface compliquée, ces morceaux ayant une aire facile à calculer (triangle ou rectangle) et on additionne simplement les aires de ces morceaux.
Comment exploiter cette stratégie naturelle pour mettre en place notre construction d'intégrale, c'est-à-dire « d'aire sous la courbe ».

? Problème 163 - Classe des fonctions intégrables

Une fois la construction de l'intégrale mise au point sur l'ensemble $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{F}(I,\mathbb{C})$, voire $\mathscr{F}(I,E)$ où E est un espace vectoriel normé comme en seconde année), quelles sont les fonctions qui admettent une intégrale sur I.
Ou dans sa version ensembliste : comment reconnaitre et qualifier l'ensemble des fonctions KH-intégrables ?
Dans le chapitre 6 (sur les primitives), nous avons affirmé (sans démonstration) que toute fonction continue sur un intervalle fermé I admettait une primitive. Est-ce vrai ?

? Problème 164 - Intégrale sur quel type d'intervalle ? Fermé ou ouvert ?

Nous avons vu que dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés sont des compacts et possèdent des propriétés plus « fortes » : ainsi le théorème de HEINE ou de WEIERSTRASS (c'est-à-dire?). La construction de l'intégrale de Riemann ou de Kurzweil-Henstock se fait donc sur ces intervalles.
Que se passe-t-il lorsqu'on considère des intervalles ouverts? En particulier avec ∞ dans une des bornes ?

? Problème 165 - Etymologie : pourquoi intégrale ?

En latin, intégrale dérive du mot entier. Il ne s'agit pas seulement du nombre entier, mais bien de quelque chose considérée *entièrement*, en totalité.
La dérivation regarde très localement l'évolution d'une variable en rap-

port d'une autre.
L'intégration regarde totalement ou globalement une variable en fonction d'une autre.
Un des problèmes des DL est que l'égalité écrite (et réelle) n'est vrai que localement (voire en limite). L'intégration doit permettre d'obtenir un résultat global, nous nous en servirons souvent (et simplement) par un *encadrement moyen*. Quitte à découper l'intégrale en morceaux puisqu'elle est faite pour!

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

2.1. Rappels calculatoires

Quelles sont les fonctions intégrables ?. Deux catégories de réponse à la question :

1. une réponse pratique : elle fait le lien avec les résultats vus au premier semestre et rappelés ici. Et elle donne la valeur de l'intégrale.
2. des réponses théoriques : elle permet d'assurer des résultats d'existence pour les fonctions continues (par morceaux) ou plus large... C'est le but de ce chapitre.

Savoir faire - Méthode 1 : primitives

Si on doit calculer $\int_a^b f$, alors si on peut reconnaitre f comme la dérivée d'une fonction F, on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ notée $[F]_a^b$.
De là un tableau à apprendre!

Savoir faire - Méthode 2 : Fractions rationnelles

Si on doit calculer $\int_a^b f$, où f est une fraction rationnelle alors on commence par décomposer f en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
On trouve une combinaison linéaire de fractions du type :

— Polynôme : intégration simple
— $\dfrac{a}{(t-r)^k}$ de primitive $t \mapsto \frac{-a}{(k-1)(t-r)^{k-1}}$ ou $t \mapsto a\ln(|t-r|)$ $(k=1)$
— $\dfrac{2t+b}{(t^2+bt+c)^k}$ (avec $b^2-4c<0$) de primitive $t \mapsto \dfrac{-1}{(k-1)(t^2+bt+c)^{k-1}}$ ou $t \mapsto \ln(t^2+bt+c)$ si $k=1$
— $\dfrac{d}{(t^2+bt+c)^k} = \dfrac{d}{(t+\frac{b}{2})^2 + \frac{4c-b^2}{4})^k} = \dfrac{4^k d}{(4c-b^2)^k} \dfrac{1}{(1+\frac{4}{4c-b^2}(t+\frac{b}{2})^2)^k}$ (avec $b^2-4c<0$), on fait le changement de variable $\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}(t+\frac{b}{2})$ qui se simplifie bien...

Savoir faire - Méthode 3 : Intégration par parties

Si on doit calculer $\int_a^b f \times g$, alors si on peut reconnaitre f comme la dérivée d'une fonction F et que g est dérivable, on a

$$\int_a^b fg = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b Fg'$$

Evidemment, cela n'a d'intérêt que si $\int_a^b Fg'$ est plus simple à calculer

Savoir faire - Méthode 4 : Changement de variable

Si on doit calculer $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, alors si il existe φ de classe $\mathscr{C}^1$-bijective ($\mathscr{C}^1$-difféomorphisme) de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$, on peut faire le changement de variable $t=\varphi(u)$. On a

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Application - Règles de Bioche

Pour aller plus loin - L'année prochaine : d'autres méthodes

On peut aussi exploiter des séries entières, et plus largement des suites ou séries de fonctions et exploiter les « gros » théorèmes d'interversion de limites. Grand moment du cours de seconde année !

Exemple - Primitive de $\dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$

Histoire - Les première années de l'intégration

Bien que l'intégrale a été définie indépendamment par Newton et Leibniz à la fin du XVIII-ième siècle, la première version la plus rigoureuse de l'intégrale à été construite par Bernard Riemann (après celle de Cauchy).

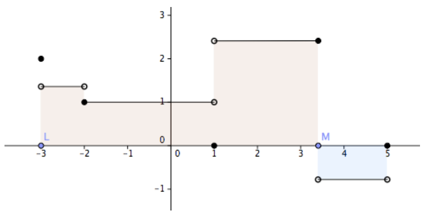
Malheureusement, comme on va le voir, cette définition n'était pas suffisamment robuste. Plusieurs versions ont dues être reprise pour élargir la définition...

2.2. « Vu de loin »

Aire sous la courbe

Analyse - Aire sous la courbe. Rappels de terminale

Représentation - Aire d'une fonction en escalier



Heuristique - Les fonctions en escalier ou les fonctions étagées

Les fonctions en escalier sont celles pour lesquelles le calcul de l'aire « sous » la courbe est la plus simple.

Il s'agit des fonctions constantes sur des intervalles.

Nous serons donc obliger de commencer par définir (ou reprendre) la notion de subdivision d'un segment (ou intervalle). Nous avons définit cela lorsqu'on a vu le lemme de Cousin...

Différentes approches historiques

Les commentaires qui suivent sont pour le moins rapides...

Heuristique - L'approche de Riemann

La construction se passe dans l'ordre suivant :

0. On sait les intégrales de fonctions en escalier.
1. On considère une fonction f continue sur un segment $[a,b]$ pour laquelle on doit calculer $\int_a^b f$.
2. On se donne un qualité d'approximation $\epsilon > 0$.
3. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle est uniformément continue (théorème de Heine).
$$\exists\, \eta > 0, \qquad \forall\, x, x' \in [a,b], |x-x'| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$
4. On découpe $[a,b]$ en n morceaux (subdivision) de taille inférieure à η : $(a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} = b$
5. On choisit alors (librement) t_i un élément de chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et une fonction en escalier définie par :
$$\varphi_{|]x_{i-1},x_i[} = f(t_i)$$
6. Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$, bien définie, approche celle de f à ϵ-près

Attention - Quelque problème

Cette intégrale est bien définie pour les fonctions uniformément continue sur un segment, mais pas très bien lorsque la fonction est plus « *pathologique* ».
Par exemple, la fonction de Dirichlet (indicatrice des rationnels) :
$$\chi_{[0,1]} : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{et} \quad t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{et} \quad t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$. Par ailleurs, comme nous le verrons plus loin, si une fonction est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, elle est nécessairement bornée. Et par contraposée...

Histoire - Henri Lebesgue

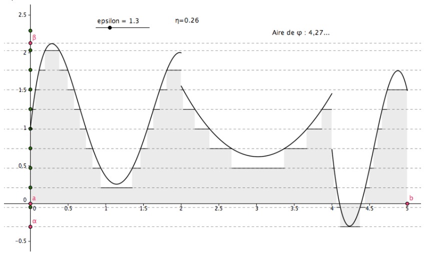
Henri Lebesgue (1875-1941) est l'un des plus grands mathématiciens français du début du XX^e siècle. Il se présentait comme issu de milieu modeste (parents ouvriers) et est surtout connu pour l'intégrale qu'il crée dans sa thèse : Intégrale, longueur, aire

Heuristique - L'approche de Lebesgue

La stratégie de Lebesgue est très différente. Pour construire cette intégrale, on raisonne non plus sur l'intervalle de départ mais sur l'intervalle image (qui peut contenir l'infini !).

0. On connait les intégrales de fonctions étagées (comme les fonctions en escalier).
1. On découpe alors l'intervalle (image) J en n morceaux : $J = \displaystyle\bigcup_{i=1}^n J_n$ et on considère alors les intervalles $I_k = f^{-1}(J_k)$.
2. Toute la difficulté repose alors dans la nature de ces ensembles $I_k = f^{-1}(J_k)$ qui peuvent être « *très pathologiques* ».
3. On calcul alors $\displaystyle\int f = \sum_k |I_k| f(t_k)$

Représentation - Aire d'une fonction étagée



Attention - Quelques problème...

Pour les intégrales de Lebesgue la notion d'intégrale impropre n'existe pas (voir dernière partie de ce chapitre).
Une fonction est intégrable au sens de Lebesgue, si et seulement si sa valeur propre est intégrable (un peu comme les suites sommables).
Donc des fonctions comme
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$
qui sont intégrables (au sens de Riemann) mais pas intégrable en valeur

absolue ne sont pas intégrable au sens de Lebesgue…

Histoire - Mathématiciens moins connus…
Jaroslav Kurzweil (né en 1926) est un mathématicien tchèque mort l'an dernier, le 17 mars 2022. Il dirigeait l'équipe de recherche en Mathématiques de l'Académie Tchèque des Sciences.
Ralph Henstock (né le 2 juin 1923 et mort le 17 janvier 2007) était un mathématicien anglais. Il a développé l'intégrale KH en 1957, indépendamment de Kurzweil (et la même année).

Heuristique - L'approche de Kurzweil-Henstock
Le cours qui suit présente l'intégrale definie indépendamment par Kurzweil et Henstock. Le principe repose sur une généralisation de l'intégration de Riemann. Elle permet d'obtenir de nombreux résultats de la théorie de Lebesgue. Mais elle reste assez peu connue… Une raison : elle nécessite au démarrage le lemme de Cousin. Mais nous le connaissons bien…

2.3. Quelques rappels de topologie sur $\mathbb{R}$

Il n'y a rien de nouveau dans cette partie, mais cela vaut le coup de revoir certains points.
Nous nous souvenons que nous avons défini $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des points x, obtenu par coupure :
$x = (A,B)$, où $A \uplus B = \mathbb{Q}$, $\forall\ (a,b) \in A \times B$, $a <_{\mathbb{Q}} b$. On a alors $a \leqslant_{\mathbb{R}} x <_{\mathbb{R}} b$.

Analyse - Schéma des principaux résultats topologiques

$\mathbb{R}$ vérifie le théorème de la borne supérieure $\forall\ A \subset \mathbb{R}$, borné, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sup A$ $\Longleftrightarrow$ Toute suite croissante majorée converge $\Longleftrightarrow$ Les suites adjacentes convergent	Propriétés essentielles (de construction de $\mathbb{R}$)
Théorème des segments emboités Si (I_n) tel que $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_n) \to 0$ alors $\exists\ a \in \mathbb{R}$ tel que $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ Et principe de dichotomie Si f est fonction d'intervalles sous additive sur $[a,b]$ et que $f(a,b) = 1$, $\Rightarrow \exists\ (a_n)(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, adjacentes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(a_n,b_n) = 1$ $\Longleftrightarrow$ Théorème de Bolzano Weierstrass Toute suite bornée admet une suite extraite convergente $\Longleftrightarrow$ Lemme de Cousin Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et δ, jauge (>0) alors $[a,b]$ admet une subdivision δ fine.	Bloc de la COMPACITE
Toute suite de Cauchy converge (et réciproquement) Suite de Cauchy : $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N$ tel que $\forall\ p > q \geqslant N$, $\lvert u_p - u_q\rvert \leqslant \epsilon$ Toute série absolument convergente est convergente	Bloc de la COMPLETUDE

Dans $\mathbb{R}$ ces blocs sont équivalents (ce n'est pas toujours le cas).

Analyse - Et pour les fonctions continues…

Exercice
Rappelez l'énoncé de ces trois théorèmes. Quelle différence entre les deux premiers ?

2.4. Subdivision d'un segment de $\mathbb{R}$

Relation d'ordre sur les subdivisions

On commence par un rappel. Les résultats qui suivent immédiatement n'ont pas vraiment été vus.

Définition - Subdivision
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
On appelle **subdivision** de $[a, b]$ toute famille finie $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de points de $[a, b]$ telle que
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
On appelle **pas** de la subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ de $[a, b]$ le réel $\delta(\sigma) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$.

Exemple - Cas particuliers : subdivision à pas constant

Définition - Relation d'ordre sur la subdivision
La subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a, b]$ est dite **plus fine** que la subdivision $\sigma' = (x'_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ de $[a, b]$ si
$$\{x'_0, \dots, x'_m\} \subset \{x_0, \dots, x_n\}.$$
Comme la relation « contenant » noté $\supset$, il s'agit d'une relation d'ordre.

Remarque - Plus fine : relation d'ordre, non totale
On peut montrer que la relation *« est plus fine »* est une relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.
Elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
Mais elle n'est pas totale (comme la relation sur $\mathbb{Z}$: *« est divisible par »*).
Mais on peut opérer sur les subdivision (comme pour les ensembles).

Définition - Affinement des subdivisions
Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$,
la subdivision obtenue en réunissant les points de σ et de σ' est plus fine que σ et que σ'.
C'est la moins fine des subdivisions plus fines que σ et σ', on la note $\sigma \vee \sigma'$.
On a $\sigma \vee \sigma' = \sup_{\supset}(\sigma, \sigma')$

Remarque - $\sigma \wedge \sigma'$
On peut également définir la plus fine des subdivisions moins fines que σ et σ'

Des subdivisions pointés

Définition - Subdivision pointée
Soit $I = [a, b]$, un segment de $\mathbb{R}$.
On appelle subdivision pointée de I la donnée
- d'une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots x_n)$ de $[a, b]$,
- un pointage de cette subdivision $t_1, t_2, \dots t_n \in I$ tels que
  $\forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

On note $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\big)$, les nombres (t_i) sont appelés les points de marquage de σ_p.

Définition - Subdivision pointée adaptée à un jauge
Un pas ou une jauge est une application $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$.
Une subdvision pointée $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\big)$ est dite adaptée au pas δ ou δ-fine, si

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n, \qquad [x_{k-1}, x_k] \subset \left[t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}\right]$$

On remarquera que $0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta(t_k)$.
Pour une jauge δ donnée, on note $\delta - \mathfrak{S}([a, b])$ (simplifiée en $\delta - \mathfrak{S}$ si cela ne conduit à aucune ambiguïté), l'ensemble des subdivisions pointés de $[a, b]$ δ-fine. Si δ est constante, on notera la notera δ^*. Dans ce cas $\delta(\sigma_p) \leqslant \delta^*$.

Proposition - Amélioration de la finesse de la subdivision
Soient δ_1 et δ_2 deux jauges.
Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, i.e. $\forall\ t \in [a, b]$, $\delta(t) = \min(\delta_1(t), \delta_2(t)) > 0$.
Alors si σ_p est une subdivision pointée de $[a, b]$, δ-fine,
nécessairement, σ_p est également δ_1-fine et δ_2-fine.
Autrement écrit : $\delta - \mathfrak{S} \subset \delta_1 - \mathfrak{S} \cap \delta_2 - \mathfrak{S}$.

Démonstration

Exercice
On note $\mathfrak{S}_\delta = \{\sigma_p$, subdivison pointée δ-fine de $[a, b]\}$.
Montrer que si $\delta_1 \leqslant \delta_2$, alors $\mathfrak{S}_{\delta_1} \subset \mathfrak{S}_{\delta_2}$.

Réunion de subdivisions

Les résultats suivants nous serons utiles autour du théorème de Chasles et le lemme de Henstock.

Proposition - Extraction
Soit δ une jauge définie sur $[a, b]$.
Si $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\big)$ est une subdivision pointée δ-fine de $[a, b]$,

alors pour tout $0 \leqslant i < j \leqslant n$, $\big(([x_k, x_{k+1}], t_{k+1}), i \leqslant k < j\big)$ est une subdivision pointée de $[x_i, x_j]$, $\delta_{|[x_i,x_j]}$ fine.

Par la suite, nous définirons la notion de sous-subdivision en réunion d'extraction.

Démonstration

Réciproquement,

Proposition - Réunion
Soient $a < b < c \in \mathbb{R}$ et δ_1 une jauge sur $[a,b]$, δ_2 une jauge sur $[b,c]$.
Soit $(\sigma_p)_1$ une subdivision pointée δ_1 fine sur $[a,b]$.
Soit $(\sigma_p)_2$ une subdivision pointée δ_2 fine sur $[b,c]$.
On note $\delta : [a,c] \to \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} \delta_1(t) & \text{si } t \in [a,b[\\ \max(\delta_1(b), \delta_2(b)) & \text{si } t = b \\ \delta_2(t) & \text{si } t \in]b,c] \end{array} \right.$.
Alors la réunion (concaténation) $(\sigma_p)_1 \cup (\sigma_p)_2$ est une subdivision pointée δ-fine de $[a,c]$

Démonstration

Forçage

Par la suite, on aura besoin d'exploiter des jauges particulières

Proposition - Forçage
Soit $c \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.
Considérons la jauge $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} |t-c| & \text{si} & t \neq c \\ \alpha & \text{si} & t = c \end{array} \right. = |t - c|\mathbb{1}_{[a,b]\setminus\{c\}} + \alpha \mathbb{1}_{\{c\}}(t)$.
Si σ_p une subdivision pointé δ-fine de $[a,b]$, alors c est nécessairement un point de marquage de σ_p.

Démonstration

<u>**Lemme de Cousin**</u>

Le lemme de Cousin énonce alors :

Théorème - Lemme de Cousin
Pour tout δ, jauge sur $[a,b]$, il existe une subdivision pointée
$\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\ldots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$, adaptée à δ (δ-fine).
Autrement écrit, pour tout δ jauge de $[a,b]$, $\delta-\mathfrak{S}([a,b])\neq\emptyset$

La démonstration du lemme de Cousin été vu en début d'année. On peut par exemple, exploiter le principe de dichotomie ou ce qui revient au même : une suite de segments emboîtés.
Petit rappel :

Démonstration

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

Heuristique - Principe

L'intégrale est facile à mettre en place pour une famille de fonctions simples : les fonctions en escalier (cf partie suivante).
Donc ici :

1. On se concentre sur l'ensemble des fonctions en escalier, c'est une algèbre.
2. On voit comment on peut *par densité* généraliser les propriétés obtenues en pas-

sant sur un ensemble *adhérant* : l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

3. On définit donc, en amont, cet ensemble.

Fonctions en escalier

Définition - Fonction en escalier

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\phi_{|]x_{i-1},x_i[}$ est constante (notée λ_i).
Une telle subdivision est dite **subordonnée** (ou **adaptée**) à ϕ.
On a $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1},x_i[} + \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i)\mathbf{1}_{\{x_i\}}$.

Représentation - Fonctions en escalier
Dans la première partie de ce chapitre, nous avons représenté des fonctions en escalier. Vous pouvez vous y reporter

Proposition - Sur les subdivisions

• Toute subdivision plus fine qu'une subdivision subordonnée à ϕ est encore subordonnée à ϕ.
• Une fonction constante sur $[a,b]$ est une fonction en escalier.
• Une fonction en escalier est bornée.

Démonstration

Exemple - Fonction en escalier. Définition algébrique

Exercice
Que vaut $\mathbf{1}_{[a,b]} + \mathbf{1}_{[c,d]}$ et $\mathbf{1}_{[a,b]} \times \mathbf{1}_{[c,d]}$?

Théorème - Algèbre

On note $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs réelles (ou plus simplement $\mathscr{E}([a,b])$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble d'arrivée).
$\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.
Et $(\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R}),+,\times)$.
Donc $\left(\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\times,\cdot\right)$ est une algèbre.

Démonstration

Pour aller plus loin - Comparaison à l'addition de fractions
C'est comme lorsqu'on met deux fractions aux même dénominateur avant de faire l'addition

Fonctions continues par morceaux

Définition - Continuité par morceaux sur un segment
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que
- f est continue sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$
- pour $i \in [\![1,n]\!]$, f admet une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite finie à gauche en x_i.

La subdivision est dite subordonnée ou adaptée à f.

Exemple - Quelques exemples

Proposition - Bornée
Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.

Démonstration

Proposition - Algèbre
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles, que l'on pourra noter $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a,b],\mathbb{R})$, est un s.e.v, et même une sous-algèbre de $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, algèbre des fonctions bornées, lui-même sous algèbre de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier

Théorème - Approximation uniforme par des fonctions en escalier
Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-\phi(x)| \leqslant \epsilon$$

On commence par démontrer (de deux façons) le cas particulier suivant :

Proposition - Approximation uniforme de fonctions continues par des fonctions en escalier
Soit f continue sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-\phi(x)| \leqslant \epsilon$$

Puis on généralisera

Démonstration

Pour aller plus loin - Convergence de fonctions...
La convergence de fonctions est une partie essentielle du cours de seconde année.
La convergence la plus naturelle est la convergence simple :
$(f_n) \overset{c.s.}{\to} f$

$$\forall\ x \in I, \forall\ \epsilon > 0 \exists\ N \mid \forall\ n \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

(Ici, chaque N dépend de x)

Mais il y a une convergence plus forte : la convergence uniforme
$(f_n) \overset{c.u.}{\to} f$

$$\forall\ \epsilon > 0 \exists\ N \mid \forall\ x \in I, \forall\ n \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

(c'est maintenant le même N pour tout x)

Pour les fonctions continues par morceaux maintenant.

Démonstration

Corollaire - Approximation uniforme par des suites de fonctions
Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{[a,b]} |f - \phi_n| = 0$.

Remarque - Convergence « uniforme »
Dans ce cas, on dit que la suite $(\phi_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f.

Démonstration

Corollaire - Encadrement uniforme
Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, ϕ et ψ, telles que

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \phi \leqslant \epsilon.$$

Démonstration

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition - Continuité par morceaux sur un intervalle
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur l'intervalle I, si pour tout segment $[a,b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.

Exemple - La fonction $f : x \mapsto e^{1/x}$ sur $]0,1]$

Heuristique - Situation courante dans l'étude de fonctions numériques
L'année prochaine à de nombreuses reprises, il faudra faire cette différence :
- L'étude sur l'intervalle I n'est pas possible,
- Mais celle sur tout segment inclus dans I est possible.

Incroyable mais vrai : les propriétés passeront alors en tout x de I (puisque tout x de I est dans un segment $[a,b] \subset I$).

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

Somme de Cauchy d'une fonction en escalier

On commence par une construction simple : l'intégrale de fonctions en escalier.

Analyse - Intégrale d'une fonction en escalier

Exercice

Montrer que si σ et σ' sont deux subdivisions subordonnées à ϕ, alors $I(\phi,\sigma) = I(\phi,\sigma')$.

Somme de Cauchy selon une subdivision pointée

Suivant cet exemple, on définit

Définition - Somme de Cauchy de f selon σ_p
Soit f une fonction numérique défini sur le segment $[a,b]$.
Soit $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2)\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ une subdivision pointée de $[a,b]$.
On appelle **somme de Cauchy de f associée à σ_p** ou **selon σ_p** le nombre réel

$$S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \times f(t_k)$$

On a noté nombre réel, mais si f est à valeur dans un espace vectoriel, ce nombre existe toujours (combinaison linéaire).

Remarque - Une somme de Cauchy est une intégrale

On notera que si $S(f,\mathscr{P}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \times f(t_k)$, alors en fait, on a

$$S(f,\mathscr{P}) = I(\overline{f},\sigma)$$

où $\sigma = (x_0, x_1, \dots x_n)$ (même subdivision que $\mathscr{P}$, mais non pointée) et

$$\overline{f} : x \longmapsto f(t_k) \text{ si } x \in [x_{k-1}, x_k[\qquad \overline{f} = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\mathbb{1}_{[x_{k-1},x_k[}$$

avec $\overline{f}(x_n) = f(t_n)$.

Cas d'une subdivision à pas constant

Remarque - Cas fréquents

On rencontre souvent le cas d'une subdivision σ à pas constant $\delta^* = \dfrac{b-a}{n}$:

$x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ (donc $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$) et $t_k = x_{k-1}$ ou $t_k = x_k$, ce qui donne respectivement :

Définition - Somme de Riemann (Cauchy à pas constant)
A toute fonction $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, on associe les sommes dites de Riemann

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \text{ ou } S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})$$

Remarque - Appellation uniforme
Sans précision, une somme de Riemann est une somme de Cauchy à pas constant.
Ces subdivisions apparaissent dans la « méthode des rectangles » pour obtenir des valeurs approchées de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple - Calcul de $R_n(f)$ et $S_n(f)$ avec $f : x \mapsto x$ sur $[0,1]$

Propriétés des sommes de Cauchy

Théorème - Propriétés des sommes de Cauchy (selon σ_p)
Soit $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_0),\ldots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ une subdivision pointée de $[a,b]$.
- $f \mapsto S(f,\sigma_p)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.
- Si f est positive sur $[a,b]$ alors $S(f,\sigma_p) \geqslant 0$.
  Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$ alors $S(f,\sigma_p) \geqslant S(g,\sigma_p)$.
- Si $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, alors on a pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$,
  en notant $\sigma_p^k = \big(([x_0,x_1],t_1),\ldots([x_{k-1},x_k],t_k)\big)$
  et ${}^k\sigma_p = \big(([x_k,x_{k+1}],t_{k+1}),\ldots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$

$$S(f,\sigma_p) = S(f,\sigma_p^k) + S(f,{}^k\sigma_p) \qquad \text{relation de Chasles}$$

Démonstration

3.3. Intégrales d'une fonction

Intégrale de Riemann : pas constant

Pour aller plus loin - Intégrale de STIELJES
Dans le DS9 de la saison 2018-2019, nous avions défini « l'intégrale de Stieljes de f contre g » comme :

$$\lim_{\delta(\sigma_p)\to 0} St(f,\sigma_p) = S$$

où $St(f,\sigma_p) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k))$.
Cela donne naturellement la formule d'intégration par parties dans un cas très générale (même si g n'est pas dérivable, seulement croissante).
Et dans le cas où g est dérivable, on trouve que $S = \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$.
Cette intégrale sert en théorie des nombres et aussi en probabilités. Elle permet de faire un lien assez naturellement entre les objets continues et les objets discrets.

Définition - Intégrale de f, au sens de Riemann
Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$.
La fonction f est dite **intégrable sur** $[a,b]$ **au sens de Riemann** ou **R-intégrable sur** $[a,b]$ s'il existe un nombre réel S tel que

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta^* > 0 \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \text{ subdivision pointée } \delta\text{−fine },|S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

On notera $\mathscr{I}_R([a,b])$ **l'ensemble des fonctions intégrables sur** $[a,b]$ **au sens de Riemann**.
Le nombre S ci-dessus est appelé l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ et est noté

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{voire} \quad \int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

On admet à ce stade que le nombre S est unique, nous le démontrerons dans le cadre plus large des fonctions intégrables au sens de Kurzweil-Henstock.

Remarque - Ecriture en fonction de n
En prenant δ de la forme $\frac{1}{n}$, comme $\delta \to 0 \iff n \to +\infty$, on a la définition équivalente :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ telle que } \forall\, \sigma_p(N) \text{ subdivision pointée}-\frac{1}{N} \text{ fine}, |S(f,\sigma_p(N)) - S| < \epsilon$$

Heuristique - C'est bien une limite
On note (u_n) converge :

$$\begin{array}{llllllll} \exists\, \ell \in \mathbb{R} & \text{tel que} & \forall\, \epsilon > 0, & \exists\, N \in \mathbb{N} & \text{tel que} & \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N, & |u_n - \ell| \leqslant \epsilon \\ \exists\, S \in \mathbb{R} & \text{tel que} & \forall\, \epsilon > 0, & \exists\, \delta^* > 0 & \text{tel que} & \forall\, \sigma_p, \delta^*\text{-fine}, & |S(f,\sigma_p) - S| \leqslant \epsilon \end{array}$$

Souvenons nous que nous avions également écrit cela en terme de réunion ($\exists$), d'intersection ($\forall$), de réunion d'intersection d'ensemble.
On notera donc

$$\lim_{\delta^*(\sigma_p)\to 0} S(f,\sigma_p) = S$$

Remarque - Le sens du $\mathrm{d}x$
Si $\int f(x)\mathrm{d}x = \lim \sum_{k=0}^{n} f(t_k)(x_{k+1} - x_k)$, alors on voit que le $\mathrm{d}x$ est la limite de $(x_{k+1} - x_k)$.
Cela donne à la fois à $\mathrm{d}x$ une rôle d'infinitésimal (selon Newton), mais aussi celui d'une homogénéité à x, ce qui explique la formule du changement de variable x en $y = \varphi(x)$, alors $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\mathrm{d}x$.
On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

Proposition - $\mathscr{I}_R([a,b]) \subset \mathscr{B}([a,b])$
Si f est intégrable sur $[a,b]$ au sens de Riemann, alors f est bornée

Démonstration

Exemple - $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ **et** $f(0) = 0$

En gardant la notation générique $\sigma_p = \big(([x_{k-1}, x_k], t_k), k \in \mathbb{N}_n\big)$, on a

Proposition - Contrôle sur la subdivision pointée δ^*-fine (et réciproquement)
Soit $\delta^* > 0$. Si σ_p est une subdivision pointée δ^*-fine, alors $\forall\ k \in \mathbb{N}_n$ $0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta^*$.
Réciproquement, si σ_p est une subdivision pointée vérifiant : $\forall\ k \in \mathbb{N}_n$ $0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta^*$,
alors σ_p est $2\delta^*$-fine.

Remarque - Liens entre intégrale
On exploitera en particulier la réciproque pour montrer que toute fonction R-intégrable est KH-intégrable.

Démonstration

Sommes « classiques » de Riemann

Là, on fait un petit détour sur un savoir-faire classique. On reprend les sommes à pas constant vues plus haut.

Théorème - Méthode des rectangles
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann.
On rappelle que :
$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \text{ et } S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \text{ où } x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$
Alors
$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$
(méthode de calcul approché de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, dite méthode des rectangles).
Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, la vitesse de convergence est en $\frac{1}{n}$.

Pour aller plus loin - Taylor-Lagrange
Soit F de classe $\mathscr{C}^1$, deux fois dérivable sur $[a,b]$.
Soit $\psi : t \mapsto F(t) - F(b) + (b-t)F'(t) - \frac{M}{2}(b-t)^2$ tel que $\psi(a) = 0$.
C'est possible avec
$$M = \frac{2(F(a) - F(b) - (b-a)F'(a))}{(b-a)^2}.$$
Alors $\psi(a) = \psi(b) = 0$.
Donc il existe c tel que $\psi'(c) = 0$.
Or $\psi'(t) = F'(t) - F'(t) + (b-t)F''(t) - M(b-t)$
Or $\psi'(c) = 0$ et donc $M = F''(c)$.
Et donc $\psi(a) = 0 = F(a) - F(b) + (b-a)F'(a) - \frac{(b-a)^2}{2}F''(c)$.
$F(a) = F(b) + (a-b)F'(b) + \frac{1}{2}(a-b)^2F''(c)$.

Démonstration

Démontrons maintenant l'ordre de grandeur de la vitesse de convergence lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$.
On exploite ici un résultat non encore démontré mais largement exploité depuis le début de l'année : le théorème de Taylor-Lagrange.
On notera que ce qui compte vraiment, c'est que f' soit R-intégrable plutôt que f de classe $\mathscr{C}^1$…

Démonstration

Si f est suffisamment régulière, on pourrait prolonger ce calcul pour avoir un DL plus précis...

Exemple - Cas particulier courant

Savoir faire - Reconnaitre les sommes de Riemann à pas constant : limite

Si l'on doit chercher la limite pour $n \to +\infty$ d'une somme k de a_n à b_n dont le terme général dépend de k ET de n, c'est très probablement une somme de Riemann à pas constant !

1. On commence par tout factoriser par n afin de transformer tous les k en $\frac{k}{n}$.
2. On écrit sur un brouillon la formule de Riemann pour mieux identifier.
3. Le facteur devant $\frac{k}{n}$ vaut $b-a$ (premier terme reconnu), le nombre additionné à $\frac{k}{n}(b-a)$ vaut a (second terme reconnu)
4. On en déduit la valeur de b. Puis on identifie pour trouver f
5. Si besoin on factorise pour faire apparaitre devant la somme $\frac{b-a}{n}$

On exploite les relations avec les primitives, démontrées plus tard mais largement utilisées depuis le début de l'année (et la relation de Chasles directe).

Savoir faire - Reconnaitre les sommes de Riemann à pas constant : vitesse de convergence

On a reconnu la formule avec le savoir-faire précédent. Il s'agit de calculer la vitesse de convergence.

1. On remplace la limite $\ell = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par $F(b)-F(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} F(x_{k+1}) - F(x_k)$
2. Il s'agit d'évaluer la différence : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} [(x_{k+1}-x_k)f(x_k) - (F(x_{k+1}) - F(x_k))]$.

3. La formule de Taylor-Lagrange donne l'existence d'un c_k tel que $(x_{k+1}-x_k)f(x_k)-(F(x_{k+1})-F(x_k)) = \frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)^2 f'(c_k)$
4. On remplace par leur valeur les x_k :

$$R_n - \ell = \frac{b-a}{2n} \times \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k) \sim \frac{(b-a)}{2n}(f(b)-f(a))$$

Attention - Il ne s'agit pas de série!!

Bien que cela y ressemble fortement, les suites R_n ou S_n ne sont pas les sommes partielles de série.
En effet, dans la cas des séries, le terme général ne dépend que de k (et pas de n).
Ici il y a bien un mélange des deux variables : n et k compris entre 0 et n...
Il faut prendre le coup d'oeil pour bien différencier ces deux objets (par ailleurs il ne faut pas non plus confondre série et somme de Riemann)

Exercice

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
Quelle est la vitesse de convergence ? (Savoir-faire)

Corollaire - Méthode des trapèzes
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\frac{R_n(f)+S_n(f)}{2} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$$

Intégrale de Kurzweil-Henstock : le pas est défini par une jauge

Pour aller plus loin - Ecriture de la convergence
Certains auteurs écrivent :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x : \lim_{\delta(\sigma_p)\to 0} S(f,\sigma_p) = S$$

ou encore

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{KH,\sigma_p} S(f,\sigma_p)$$

nous verrons que cela a du sens, et que c'est bien pratique

Définition - Intégrale de f
Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$.
La fonction f est dite **intégrable sur** $[a,b]$**, au sens de Kurzweil-Henstock** ou **KH-intégrable sur** $[a,b]$ s'il existe un nombre réel S tel que

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \forall\, \sigma_p \in \delta - \mathfrak{S},\ |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

On notera $\mathscr{I}([a,b])$ **l'ensemble des fonctions intégrables sur** $[a,b]$.
Le nombre S ci-dessus est appelé l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ et est noté

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{voire} \quad \int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

On dit que δ est ϵ-adaptée à f. On note $D_{KH}(f,\epsilon)$, l'ensemble des jauges ϵ-adaptée à f.
On notera que si $\delta \in D_{KH}(f,\epsilon)$, $\quad \forall\, \delta' \leqslant \delta,\ \delta' \in D_{KH}(f,\epsilon)$
$\forall\, \epsilon' > \epsilon,\ \delta \in D_{KH}(f,\epsilon')$.

Evidemment, la jauge δ dépend de ϵ fixé a priori.
Il nous faudrait donc maintenant préciser ce qu'est l'ensemble $\mathscr{I}([a,b])$.

Remarque - Existence d'une subdivision δ-fine

Cette définition serait problématique si pour une jauge δ, il n'existait pas de subdivision δ-fine.
Heureusement, le lemme de COUSIN nous montre que ceci est impossible.
Notre définition semble donc opérante.
Ce serait le même problème pour la question de $\lim\limits_{n\to+\infty}$ ie $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N$ si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N\}$ était vide. Ce qui n'est pas le cas grâce au lemme d'ARCHIMÈDE.

Exemple - Intégrale d'une fonction nulle sauf en un nombre fini de points

Exercice

Si le nombre de points (y_i) est infini mais dénombrable. Montrer qu'on a encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$

> **Pour aller plus loin - Cas d'un nombre dénombrable de points non nuls**
> *Le résultat marche aussi pour un nombre dénombrable de points.*
> *Pour δ, on considère $\frac{\epsilon}{2^i}$ au lieu de $\frac{\epsilon}{p}$.*
> *Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable alors $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est KH-intégrable, d'intégrale nulle.*

Proposition - Unicité de l'intégrale
Si f est R-intégrable sur $[a,b]$, alors f est KH-intégrable.
Si f est intégrable, son intégrale est unique (définie de l'une ou l'autre des façons).

Démonstration

> **Pour aller plus loin - Ecriture de la convergence (2)**
> *On peut résumer en :*
> $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\delta^*(\sigma_p)\to 0} S(f,\sigma_p)$$
> $$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\delta(\sigma_p)\to 0} S(f,\sigma_p)$$
> *Ceci est dû au fait que*
> $\{\mathscr{P}$ *subdivisions pointées* δ*-fine,* $\forall\, \delta > 0\}$
> $\subset \{\mathscr{P}$ *subdivisions pointées* δ*-fine,* $\forall\, \delta$ *jauge*$\}$.

> **Pour aller plus loin - Fonction à valeurs vectorielles**
> *En seconde année, on étudie les fonctions de $\mathbb{R} \to E$, où E est un espace vectoriel normé (on parle de fonction vectorielle). Pour ces fonctions, tout se passe de la même façon...*

L'exemple qui suit, montre qu'il n'est pas nécessaire que la fonction soit bornée pour être KH-intégrable.

Il donne aussi une méthode pour savoir comment choisir δ, adaptée à f.

Exemple - $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ **sur** $]0,1]$

Savoir faire - A chaque problème sa jauge !
Vous aurez peu d'exercices où il faudra montrer à la main, la KH-intégrabilité.
Une idée (parmi d'autres) : pour chaque problème de la fonction f, on crée une jauge qui contient une solution à ce problème (pointage...).
Puis, on prend la jauge minimale, qui contient la solution à tous les problèmes

Pour aller plus loin - Fonction intégrable au sens de Lebesgue
*f est intégrable au sens de Lebesgue si f **ET** $|f|$ sont toutes deux intégrables au sens de Kurzweil-Henstock.*
Mais la démarche est différente, c'est une raison qu'il fait qu'il s'agit de l'intégrale souvent privilégiée dans le second cycle (école d'ingénieur ou université).

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables, ou : Qui est intégrable ?

Si la jauge peut être choisie constante, alors la fonction est R-intégrable et donc KH-intégrable, sinon elle est KH-intégrable (ou rien).
Nous le verrons sur différents exemples

4.1. Notations

Définition - Ensemble
On note $\mathscr{I}_{\mathscr{R}}([a,b])$ l'ensemble des fonctions R-intégrables sur $[a,b]$.
On note $\mathscr{I}_{\mathscr{KH}}([a,b])$ l'ensemble des fonctions KH-intégrables sur $[a,b]$.
Si on ne précise pas : $\mathscr{I}([a,b])$ est un abus de notation de $\mathscr{I}_{\mathscr{KH}}([a,b])$.
Par abus, on peut aussi oublier de noter $([a,b])$, si le contexte est assez clair.
On rappelle que $\mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[a,b]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Un des buts de ce chapitre est de caractériser ces ensembles, donner des exemples...

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Riemann

Les propriétés suivantes découlent des résultats sur les sommes de Riemann. Plus précisément : par continuité et croissance du passage à la limite $\lim\limits_{\delta(\sigma_p)\to 0} S(f,\sigma_p) = \int_a^b f$

Pour aller plus loin - Structure d'algèbre
Si f et $g \in \mathscr{I}([a,b])$, on ne peut pas espérer grand chose de $f\times g$.
Souvenons-nous qu'il n'y a pas de relation simple entre $\int f\times g$ et $\int f$ et $\int g$.
Concernant la composition, on peut montrer que si $f \in \mathscr{I}([a,b])$ et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ dérivable à dérivée bornée, alors $f\circ\varphi\times|\varphi'| \in \mathscr{I}([c,d])$. De même si f dérivable sur $[a,b]$ et φ sur $[c,d]$ avec $\varphi([c,d]) \subset [a,b]$, alors

Théorème - Extensions des propriétés de l'intégrale

— $\mathscr{I}([a,b])$ et $\mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels et $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire sur $\mathscr{I}([a,b])$ et sur $\mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{R})$

— positivité : $f \in \mathscr{I}([a,b]),\ f \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$

— croissance : $f, g \in \mathscr{I}([a,b]),\ f \geqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} g$

— majoration en valeur absolue : $f \in \mathscr{C}_M([a,b]) \Rightarrow |f| \in \mathscr{C}_M(\mathbb{R})$ et

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

En revanche, on n'a pas nécessairement : $f \in \mathscr{I} \Rightarrow |f| \in \mathscr{I}$.

mais, si f et $|f| \in \mathscr{I}([a,b])$, alors $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Démonstration

4.3. Fermeture par convergence uniforme

Avant de faire la liste des fonctions intégrables au sens de Riemann ou au sens de Kurzweil-Henstock, nous avons besoin d'un théorème de stabilité.

Cas simple des fonctions en escalier

Remarque - Fonction intégrable au sens de Riemann
f est intégrable au sens de Riemann si dans la définition précédente la jauge δ est nécessairement constante.
On a vu que c'est le même passage de l'uniforme continuité (jauge constante comme l'intégrale de Riemann) à la continuité plus souple (jauge adaptée comme pour l'intégrale de Kurzweil-Henstock).
Pour démontrer que les fonctions en escalier sont KH-intégrables, on exploitera une jauge constante. On en déduit qu'elles sont en fait R-intégrable.

Analyse - Fonction créneau et fonction en escalier

Les fonctions en escalier sur un segment sont donc R-intégrables et donc KH-intégrables.

Proposition - Intégration des fonction en escalier
Les fonctions en escalier sur un segment sont donc R-intégrables et KH-intégrables.
Et plus précisément si $f \in \mathscr{E}([a,b])$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i$$

où $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est une subdivision quelconque subordonnée à f.

Stabilité uniforme

Théorème - Encadrement
Une fonction f est KH-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si,
pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions $f_{-\epsilon}$ et $f_{+\epsilon}$ KH-intégrables tq :

$$f_{-\epsilon} \leqslant f \leqslant f_{+\epsilon} \qquad \text{et} \qquad \left|\int_a^b f_{+\epsilon} - \int_a^b f_{-\epsilon}\right| \leqslant \epsilon$$

On a le même résultat de fermeture d'espace des fonctions R-intégrables par convergence uniforme :

Proposition - Encadrement
Une fonction f est R-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si,
pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions $f_{-\epsilon}$ et $f_{+\epsilon}$ R-intégrables tq :

$$f_{-\epsilon} \leqslant f \leqslant f_{+\epsilon} \qquad \text{et} \qquad \left|\int_a^b f_{+\epsilon} - \int_a^b f_{-\epsilon}\right| \leqslant \epsilon$$

Il s'agit de la même structure de démonstration, mais la jauge est restreinte à l'ensemble des jauges constantes dans le second cas.

Démonstration

Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux).
Nous savons que les fonctions en escalier sur $[a,b]$ sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

> ***Pour aller plus loin** - $\mathscr{I}([a,b])$*
> *En fait, on peut démontrer mieux : $\mathscr{I}([a,b])$ est un espace vectoriel ordonné…*
> *Il semble qu'ils vérifient une certaine propriété de continuité*

Proposition - $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a,b]) \subset \mathscr{I}([a,b])$
Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est R-intégrable et KH-intégrable sur $[a,b]$.

Corollaire - Fonction continue
Soit f continue sur $[a,b]$, alors f est R-intégrable KH-intégrable sur $[a,b]$

Démonstration

Remarque - Changement de valeurs en quelques points
Lorsque l'on change la valeur de f continue par morceaux en un nombre fini de points, on ne change pas la valeur de l'intégrale.
On peut le voir avec f_1 comme fonction nulle sauf en un nombre fini de points (fonction en escalier).
Puis on exploiter la linéarité pour une fonction f quelconque.

Remarque - Calcul d'aire
Si $f \geqslant 0$, $\int_{[a,b]} f$ représente, en unité d'aire, l'aire comprise entre la courbe, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

4.4. Théorèmes fondamentaux de l'analyse

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.
Cela change avec la partie qui suit.

Fonction dérivable

> ***Histoire** - La clé*
> *Ce résultat a été trouvé indépendamment par Newton et Leibniz (bien avant que l'intégrale soit réellement définie de manière satisfaisante).*
> *Une grande tension entre les mathématiciens britanniques et ceux du continent s'est alors produite suite à une querelle de priorité…*

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version forte)
Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et admettant une dérivée à droite en a et à gauche en b.
Notons f la dérivée de F. Alors f est KH-intégrable ($f \in \mathscr{I}([a,b])$) et :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Remarque - Jauge adaptée, inégalité des accroissements finis et réciproque
Il faut trouver une jauge bien adaptée. Comme le montre la démonstration, cette jauge nous est fourni par le théorème des accroissements finis.
D'une certaine façon, l'utilisation de la jauge pour définir l'intégration est une sorte de réciproque du théorème des accroissements finis.

Démonstration

Remarque - Retour sur le choix de la jauge
La jauge δ est définie ici en fonction du contrôle des variations de la dérivée (ou de la dérivée seconde). Si $f = F'$ varie beaucoup au voisinage de x, alors la jauge $\delta(x)$ est relativement petite.

Savoir faire - Trouver la jauge pour une fonction f admettant une primitive F

Si f admet une primitive F, i.e. $F' = f$, alors on a une jauge naturelle : celle de la la dérivation de F.

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*, \forall\, x, y \in [a,b],\ |y-x| \leqslant \delta(x) \Rightarrow \left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f'(x)\right| \leqslant \epsilon$$

Alors si σ_p est δ-fine :

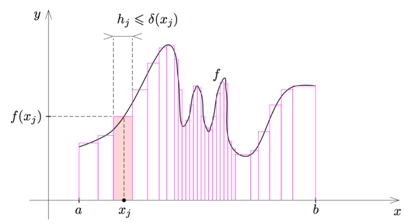
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (F(b)-F(a)) = \sum_{k=1}^{r} [(x_{k+1}-x_k)f(t_k) - (F(x_{k+1})-F(t_k)) - (F(t_k)-F(x_k))]$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (F(b)-F(a)) \leqslant \epsilon(b-a)$$

en respectant la croissance : $x_k < t_k < x_{k+1}$

Primitives

Représentation - Choix de la jauge



(illustration extraite de l'excellent cours de Jean-Pierre Demailly)

Remarque - Rappels. Revoir le chapitre 6
Les résultats qui suivent justifient le cours du chapitre 6 (calcul de primitives) vu en début d'année.
Il est bon de retravailler ce cours, en particulier :
— Revoir les primitives usuelles
— Revoir la méthode du changement de variable pour le calcul d'intégrale
— Revoir la méthode de l'intégration par parties pour le calcul d'intégrale

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version faible)
Soit f continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in I$.
Alors la fonction
$$F: \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$
est de classe C^1 sur I et $F' = f$.
C'est de plus l'unique primitive de f nulle en $a \in I$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Et si f n'est pas continue...
Ce n'est pas grave, si f est KH-intégrable sur I, alors la fonction F définie de la même façon est dérivable et de dérivée $F' = f$ presque partout.
C'est à dire si $A = \{x \in I \mid F'(x) - f(x) \neq 0\}$, alors $\displaystyle\int_I \mathbb{1}_A = 0$.
La théorie de la mesure de Lebesgue se cache derrière cette porte...

Corollaire - Primitive pour une fonction continue
Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Ce résultat se démontre également en restant dans le cadre des fonctions au sens de Riemann. Car toute fonction continue sur une segment est uniformément continue, elle est donc intégrable au sens de Riemman (on peut prendre une jauge constante).

Attention - Pas toutes les primitives
On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.
Un contre-exemple : pour $f(x) = \cos x$, la primitive $F(x) = \sin x + 2$ ne peut s'obtenir ainsi.

Et on retrouve le résultat largement exploité depuis le début d'année :

Théorème - Expression en fonction d'une primitive
Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b.$$

Démonstration

Remarque - Cas des fonctions continues par morceaux
• Si une fonction f, continue par morceaux, admet une primitive, alors f est continue.
En effet, soit F telle que $F' = f$, F' admet des limites à droite et à gauche en tout point, or si F est dérivable (donc continue) et $F'_{/I\cap]-\infty,a[}$ admet une limite ℓ_1 alors $F'(a) = \ell_1$ (de même à droite avec ℓ_2, par théorème de prolongement des fonctions dérivables) et donc $\ell_1 = \ell_2 = f(a)$, c'est-à-dire que $f = F'$ est continue en a.
• Si f est continue par morceaux, $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est continue sur I, dérivable en tout point x_0 en lequel f est continue avec $F'(x_0) = f(x_0)$ et sinon $F'_g(x_0) = \lim\limits_{a_i^-} f$ et $F'_d(x_0) = \lim\limits_{a_i^+} f$.

Attention - Dérivation

Si f est continue et que $G : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, alors G est dérivable et $G'(x) = f(x)$ et non : $f(x) - f(x_0)$, comme lu souvent !

Savoir faire - Etudier $x \mapsto \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$

Supposons f est continue, h_1 et h_2 dérivable. Notons F une primitive de f,

$$G : x \mapsto \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\mathrm{d}t = F(h_2(x)) - F(h_1(x))$$

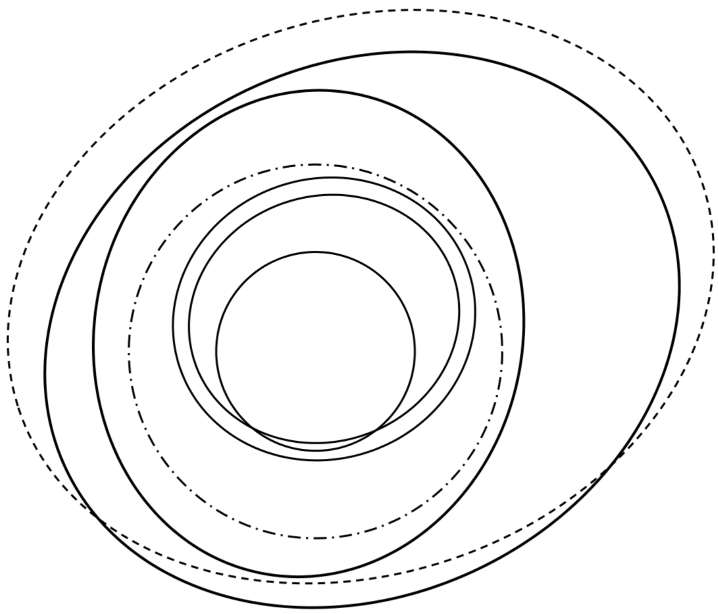
dérivable par composition (et soustraction) de dérivée :

$$G'(x) = h_2'(x)\times F'(h_2(x)) - h_1'(x)\times F'(h_1(x)) = h_2'(x)\times f(h_2(x)) - h_1'(x)\times f(h_1(x))$$

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

Afin de visualiser les résultats en termes d'ensemble, on peut faire un diagramme de Wenn.
Notons que ces ensembles sont toujours **des espaces vectoriels** et que la forme naturelle d'un espace vectoriel n'est pas celle d'une « patate » (mais plutôt celle d'un plan dans un espace euclidien...).
Ecrire sur le diagramme suivant où se trouve les espaces vectoriels :

— $\mathscr{B}([a,b])$
— $\mathscr{C}([a,b])$
— $\mathscr{C}_M([a,b])$
— $\mathscr{E}([a,b])$
— $\overline{\mathscr{E}([a,b])}^u$, l'ensemble des limites uniformes des fonctions en escalier
— $\mathscr{I}([a,b])$
— $\mathscr{I}_R([a,b])$



5. L'intégrale comme un « outil puissant » de l'analyse

5.1. Relation de CHASLES

Une première implication

Théorème - Relation de Chasles
Soient $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$.
Si les restrictions de f à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont intégrables, alors f est intégrable sur $[a,b]$.
Dans ce cas :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

L'idée : faire des extractions de subdivisions et un forçage en c.

Démonstration

Remarque - Retour sur la démonstration de la version faible du théorème fondamentale
Pour la version faible, on suppose f continue sur I, donc nécessairement intégrable sur $[a,x]$ (ou $[x,a]$ respectivement), mais aussi sur $[a,x+h]$ et

$[x, x+h]$ (resp. $[x+h, a]$ et $[x, x+h]$).
On peut appliquer ce théorème de Chasles direct. Donc $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Une réciproque ? Critère de Cauchy pour l'intégrale

Il y a bien une réciproque, si l'on se concentre sur les segments (intervalles compacts).

Analyse - $f \in \mathscr{I}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathscr{I}([a',b'])$?

Rappel :

Proposition - Critère de Cauchy-Suite
Soit (u_n) telle que

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \mid \forall\, p, q \geqslant N, |u_p - u_q| \leqslant \epsilon$$

Alors (u_n) est convergente (et réciproquement)

Remarque - Démonstration
Pour la démonstration, on a :

1. Montrer que (u_n) étaient bornée ($\epsilon = 1$, puis N, puis $\forall\, p \geqslant N$, $u_p \in [u_N - 1, u_N + 1]$)
2. Montrer que $(u_{\varphi}(n))$ était convergente (BW) vers ℓ.
3. Puis que (u_n) (en entier) converge vers ℓ

On a la proposition suivante :

Pour aller plus loin - Limitesup
Prenons $\epsilon = 1$, et donc il existe N tel que $\forall\, p \geqslant N$, $u_p \in [u_N - 1, u_N + 1]$.
Donc (u_p) est bornée (à partir d'un certaine raing)
On note $v_q = \sup\{u_p, p \geqslant q\}$. (v_q) est décroissante et minorée donc convergente vers ℓ.
On montre ensuite que (u_n) converge vers ℓ.

Proposition - Critère de Cauchy-Intégrale
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall\, (\sigma_p)_1, (\sigma_p)_2, \delta\text{-fine}, |S(f,(\sigma_p)_1) - S(f,(\sigma_p)_2)| \leqslant \epsilon$$

Alors f est intégrable sur $[a,b]$.
La réciproque est vraie : si f est intégrable, alors elle vérifie le critère Cauchy

Démonstration

Application - Théorème d'encadrement

Appliquons ce résultat à la réciproque du théorème de Chasles

Proposition - Diminution du segment d'intégration
Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors pour tout $a', b' \in]a,b[$,
$f_{|[a',b']}$ est intégrable sur $[a',b']$

Démonstration

Corollaire - Réciproque de Chasles
Si f est intégrable sur $[a,b]$ et $c \in]a,b[$.
Alors les restrictions de f sont intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ respectivement et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$

Démonstration

Généralisation (notation)

Définition - Notations
Soient I un segment, f intégrable sur I, $(a,b) \in I^2$. On pose :

$$\begin{aligned}
&\text{si } a<b, \quad \int_a^b f(t)\,dt = \int_{[a,b]} f\\
&\text{si } a>b, \quad \int_a^b f(t)\,dt = -\int_{[b,a]} f\\
&\text{si } a=b, \quad \int_a^b f(t)\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Proposition - Relation de Chasles
Avec ces notations, la relation de Chasles s'écrit, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Lemme de Henstock et sous-subdivision

Heuristique - Sous-subdivisions

Considérons une subdivision pointé $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{n-1},x_n],t_n\big)$ de $[a,b]$. On est amené à évaluer

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - (x_k - x_{k-1})f(t_k) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(t)-f(t_k)\big)\mathrm{d}t$$

d'après la relation de Chasles (et intégration d'une constante).
Lorsque cette différence est comprise entre $-\epsilon$ et $+\epsilon$, est-ce qu'on est assuré que chaque terme $\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(t)-f(t_k)\big)\mathrm{d}t$ est également en valeur absolue plus petite que ϵ ? Et une somme quelconque de ces termes : $\sum_{k\in J\subset\mathbb{N}_n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(t)-f(t_k)\big)\mathrm{d}t$?

Définition - Sous-subdivision

Soit $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)$ une subdivision pointée d'un segment $[a,b]$.

On dit que s_p est une sous-subdivision de σ_p, s'il existe $I\subset\mathbb{N}_n$ tel que $s_p = \big(([x_{k-1},x_k],t_k), k\in I\big)$.

L'ensemble I est appelé ensemble d'appui de la sous-subdivision s_p à partir de σ_p.

On appelle domaine de s_p, l'ensemble $\mathscr{D}(s_p) = \bigcup_{k\in I}[x_{k-1},x_k]$.

Exemple - Cas simple

Pour aller plus loin - Subdivision ?

On peut aussi dire que s_p est une subdivision pointée de $\mathscr{D}(s_p)$ qui la plupart du temps n'est pas un intervalle…

Théorème - Lemme de Henstock

Soient $f\in\mathscr{I}([a,b])$ et $\epsilon>0$.

Soit δ, une jauge ϵ-adaptée à f, i.e. $\delta\in D_{KH}(f,\epsilon)$.

(Donc $\forall\ \sigma_p$, δ-fine, $|S(f,\sigma_p)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t|\leqslant\epsilon$).

Alors pour toute sous-subdivision s_p d'une subdivision σ_p, δ-fine et d'appui I

$$\left|S(f,s_p)-\int_{\mathscr{D}(s_p)} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k\in I}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\big(f(t_k)-f(t)\big)\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon$$

Remarque - Une jauge adaptée à f, <u>sur toute la longueur</u>

Ce « lemme » signifie que, pour toute partie de $[a,b]$ que vous regardez, la sous-subdivision donne une somme de Riemann ϵ-ment proche de l'intégrale.

Cette proximité se retrouve uniformément tout au long de la fonction.

Autrement écrit : si la somme de Cauchy calculée globalement est proche de la valeur de l'intégrale, ce n'est pas avec des compensations entre quantités positives et quantités négatives, mais bien parce que toutes les différences sont plus petites qu'ϵ (au plus).

Pour aller plus loin - Intégrales impropres (1)

Dans le cadre de l'intégrale de Riemann, il n'est pas possible de donner du sens à des intégrales comme $I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ car l'intégrant n'est pas borné. L'astuce, vue en seconde année, consiste à définir ce nombre I comme la limite : $\int_{\to 0}^1\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t := \lim\limits_{x\to 0}(2\sqrt{1}-2\sqrt{x})$.

Pour l'intégrale KH, ceci n'est en règle pas générale grâce au théorème de Hacke qui découle du lemme de Henstock : f est KH-intégrable sur $[a,b]$ ssi $\forall\ c\in[a,b]$, f est KH-intégrable sur $[a,c]$ et $F(c):=\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b.

Dans ce cas $\lim\limits_{c\to b}F(c)=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration

Application - Majoration de la somme des valeurs absolues

Pour aller plus loin - Intégrales impropres (2)

Il reste également à définir une intégrale sur un intervalle non bornée.

Pour la KH-intégrale sur $\mathbb{R}$, on doit préciser adapter la notion de jauge adaptée.

On dit que $\sigma_p = \big([x_{i-1}, x_i], t_i), i \in \mathbb{N}_n\big)$ est une subdivision de $[a, +\infty[$ δ_∞-fine si :

- $x_n = +\infty$ *(et $t_n = +\infty$)*
- $\forall\, k \in \mathbb{N}_{n-1}\ :\ t_k - \frac{\delta(t_k)}{2} \leqslant x_{k-1} \leqslant t_k \leqslant x_k \leqslant t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}$
- $\dfrac{1}{\delta(t_n)} \leqslant x_{n-1}$ *(rappel : $t_n = +\infty$)*

Le théorème de Hacke peut s'appliquer également, et on retrouve les intégrales impropres de seconde année.

Exercice

Soit $f \in \mathscr{I}([a,b])$. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que F est continue en tout $c \in [a,b]$.

5.2. « Contrôle » par intégration

Théorème(s) de la moyenne

Remarque - Le théorème de la mouche

M. Gissot, professeur en PC* (et anciennement en MPSI3) parle du théorème de la mouche pour dire que :

— si l'on sait qu'une mouche se déplace dans une pièce, on ne sait rien de sa vitesse

— si on contrôle la vitesse de la mouche, alors on contrôle (sur un temps relativement court) son déplacement.

Pour aller plus loin - Théorème de convergence uniforme

Les théorèmes de convergence uniforme où ceux qui en découlent (théorème des intégrales à paramètres $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ avec suffisamment de régularité pour $x \mapsto f(x,t)$) se démontrent de la même façon (en seconde année) pour l'intégrale de Riemann que pour l'intégrale de Kurzweil-Henstock.

Proposition - Inégalité de la moyenne

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|.$$

Démonstration

Pour aller plus loin - Théorème de convergence dominée (convergence simple)

Les théorèmes de convergence monotone et convergence dominée énoncés en seconde année pour l'intégrale de Riemann sont identiques pour l'intégrale de Kurzweil-Henstock.

On peut ajouter même comme étape intermédiaire le théorème de convergence encadrée :

Si (f_n) est une suite de fonctions KH-intégrables sur I qui converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe g, h KH-intégables sur I avec $g \leqslant f_n \leqslant h$ sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors f est KH-intégrable sur I et $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Définition - Valeur moyenne de f

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.

Alors $\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Exercice

Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$.

Pour aller plus loin - Règles d'or de l'analyse

La première règle d'or en analyse : pour contrôler une fonction (transformation, distribution...), il faut contrôler sa dérivée puis intégrer.

La seconde règle d'or de l'analyse (qui lui est équivalente) : si l'on veut comprendre une variable erratique, il faut en faire la moyenne (intégration...). C'est ce qui est fait avec le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire, par exemple.

Exercice

Montrer les théorèmes suivants :

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue et $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, positive et intégrable.
   Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, postive, de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante et $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue.
   Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x$.

Positivité et continuité

Proposition - Intégrale d'une fonction positive et continue

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue, positive**.

Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Démonstration

Exercice

Autre démonstration : On note $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$, croissante. Conclure par contraposition.

Le théorème suivant nous sert souvent (en particulier pour montrer que certaines formes bilinéaires sont définies) :

Corollaire - Intégrale nulle d'une fonction continue, de signe constant

Soit f **continue, de signe constant** sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.
Alors f est nulle sur $[a,b]$.

Démonstration

Attention - Toutes les hypothèses sont importantes

S'il manque l'une des deux hypothèses, le résultat est faux.

— Donner un contre-exemple pour une fonction continue, non nulle, d'intégrale nulle :

— Donner un contre-exemple pour une fonction continue par morceaux mais non continue, positive, non nulle, d'intégrale nulle.

5.3. Extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ où $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Continuité par morceaux

On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f_{|]a_{i-1},a_i[}$ soit continue, f admette des limites dans $\mathbb{C}$ à droite en a_{i-1}, à gauche en a_i.
Cela revient à dire que $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ sont continues par morceaux.

Pour aller plus loin - Intégrales de fonction à valeurs vectorielles

En seconde année, on prolonge également l'intégrale pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to E$, où E est un espace vectoriel.
Si E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, on procède de la même façon avec la KH-intégrale en étudiant (comme pour les fonctions à valeurs complexes), les intégrales des fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$ (avec (e_k) base de E.

On se contente ici de l'intégrabilité pour des fonctions continues par morceaux :

Définition - Intégrale complexe

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le complexe

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re} f + i \int_{[a,b]} \mathfrak{Im} f$$

et on utilise les mêmes conventions pour $\int_a^b f(t)\,dt$.

Mais on a mieux :

Définition - Intégrale KH complexe
On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est (KH)-intégrable sur $[a, b]$ si $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ sont intégrables sur $[a, b]$.
On a alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re} f + i \int_{[a,b]} \mathfrak{Im} f$.

Remarque - Plusieurs définitions ?
En fait, la définition :

$$\exists\, S, \text{tel que } \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta \in D(f, \epsilon) \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \delta - \mathfrak{S}, \qquad \left|S(f, \sigma_p) - S\right| \leqslant \epsilon$$

est toujours valable, en lisant des modules au lieu de valeurs absolues.
Elle est équivalente à la définition par parties réelles et imaginaires, en se souvenant que $|z| \leqslant \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)$ et $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$, puis en exploitant $\min(\delta_1, \delta_2) - \mathfrak{S} \subset \delta_1 - \mathfrak{S} \cap \delta_2 - \mathfrak{S}$.

Théorème - Propriétés
On a les propriétés suivantes

— linéarité : $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a, b], \mathbb{C})$ $(K = \mathbb{C})$

— relation de Chasles : $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(I, \mathbb{C})$, pour tout $(a, b, c) \in I^3$,
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

— module : $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a, b], \mathbb{C}) \Rightarrow |f| \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a, b], \mathbb{R})$ et
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

— sommes de Riemann : si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

5.4. Formules de Taylor

Remarque - Rappels de notation
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $a \in I$. On suppose que f est n fois dérivable en a.
Le développement de Taylor à l'ordre n de f en a est l'expression :

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

On pose $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$. R_n est le reste de Taylor à l'ordre n de f en a.
L'idée est de considérer T_n comme une approximation polynomiale de f en a, R_n mesurant l'erreur commise.

Théorème - Formule de Taylor avec reste intégral
Soient f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe C^{n+1}, $a, b \in I$. Alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Ou de même $R_n(b) = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.

Pour aller plus loin - Alléger les hypothèses
On peut supposer juste que f est dérivable $n+1$, la KH-intégration de $f^{(n+1)}$ existera donc...

Démonstration

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange
Soient f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe C^{n+1}, $a, b \in I$. Alors

$$|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Ou de même $|R_n(b)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.
Si $b < a$ il faut remplacer $[a, b]$ par $[b, a]$.

Démonstration

La formule suivante découle des précédente (et avait déjà été rencontrée)

Théorème - Formule de Taylor-Young
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), n fois dérivable en $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0.$$

Ou de même $R_n(x) = o((x-a)^n)$.

Savoir faire - Utilisation des différentes formules (de Taylor)

— L'inégalité de Taylor-Lagrange donne un résultat global (sur tout l'intervalle I) et permet de majorer $|R_n|$.
— La formule de Taylor avec reste intégral donne également un résultat global, c'est de plus une expression exacte que l'on utilise lorsque la majoration du reste n'est pas suffisante, par exemple si on veut en étudier le signe.
— La formule de Taylor-Young donne uniquement un résultat local, elle sert donc à préciser la fonction f au voisinage de a.

On fait la démonstration grâce à l'exercice suivant :
Exercice
Taylor-Young avec les hypothèses les plus générales :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, où I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ tels que f soit $n-1$ fois dérivable sur I et admette une dérivée n-ième en a. On veut montrer qu'il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$$

1. On suppose f réelle.
   On considère ϵ définie par : $\epsilon(a) = 0$ et pour $x \neq a$,

$$\epsilon(x) = \frac{n!}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)$$

   On fixe un réel $x \neq a$ et $A(x) = f^{(n)}(a) + \epsilon(x)$.
   Et enfin on considère la fonction ϕ définie sur I par

$$\phi(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(t-a)^n}{n!} A(x).$$

   Calculer $\phi^{(k)}(a)$, pour tout $k \leqslant n-2$.
2. Montrer que pour tout $i \leqslant n-1$, il existe $x_i \in]a, x[$ tel que $\phi^{(i)}(x_i) = 0$.
3. En déduire la limite de $A(x)$ pour $x \to a$, puis celle de $\epsilon(x)$.
4. Faire le cas d'une fonction complexe.

6. Bilan

Synthèse

- ⇝ Avant même de définir précisément ce qu'est une fonction (prémices : Euler), les mathématiciens savaient ce qu'était en gros une intégrale (avec la notion d'aire). Puis au fur et à mesure des besoins la définitions s'est élargie, précisée. Ainsi Riemann complète la construction de Cauchy au milieu du XIXe siècle afin de rendre cohérent la théorie de Fourier. Cette construction de Riemann est satisfaisante en MPSI elle permet de montrer que toute fonction continue sur un intervalle bornée admet une primitive. Mais la quête, par les mathématiciens, d'une définition robuste ne s'arrête pas là. Ainsi Lebesgue (début du XXe) propose une définition plus large encore puisqu'elle permet de dire que l'espace des fonctions intégrables est complet, mais en revanche, elle gère mal la notion d'intégrale impropre. Denjoy, Perron, indépendamment proposent une nouvelle construction, reprise et mieux présentée par Kurzweil et Henstock (1950), où apparait concrètement une définition qui généralise l'intégrale de Riemann : la constante δ (pour Riemann) devient une jauge (fonction positive) qui s'adapte à l'intégrant. C'est pourquoi, on parle aussi d'intégrale de jauge. Le lemme d'Henstock prouve comment la jauge s'adapte parfaitement à la fonction f.
- ⇝ Les fonctions en escalier sont intégrales, et la valeur de leur intégrale est aisément calculable. Si une fonction est comprise uniformément entre deux fonctions intégrables, alors elle est intégrables. Or les fonctions continues (par morceaux) sont enfermables uniformément sur un segment entre deux fonctions en escalier. Les fonctions continues (par morceaux) sur un segment sont donc toutes intégrables.
  Puis si on définit, *pour f continue*, les primitives F de f, on trouve alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$.
  Mais on fait mieux, à condition de prendre l'intégrale de KH : toute fonction dérivable F (avec F' non nécessairement continue) on a $\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$. Le calcul de l'intégrale est donc, à 99% du temps, réduit à un calcul de primitive (i.e. trouver la fonction dont la dérivée est...). Les techniques du début d'année doivent être maitrisées : tableau à connaître par coeur, linéarité, intégration par parties, changement de variables (Règle de Bioche...). On se sert aussi de la positivité et croissance de l'intégrale, et de la règle de Chasles
- ⇝ Souvent la pratique est à contre-sens de la construction théorique, ainsi des sommes de Riemann. Elles sont théoriquement créées pour calculer des intégrales; mais dans la pratique, on exploite le calcul d'intégrale (point précédent) pour évaluer la somme de Riemann, rencontrée comme problème. De même de l'extension complexe : on étudie parties réelles et imaginaires séparément pour intégrer la foncion. Ou encore la formule de Taylor : elle permet par du maitrise de calcul intégrale de mieux connaitre une fonction f. Et enfin la comparaison série-intégrale : on maîtrise le calcul intégrale, c'est lui qui permet d'encadrer des calculs sur les séries (er non l'inverse).

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Méthode 1 : primitives
— Savoir-faire - Méthode 2 : Fractions rationnelles
— Savoir-faire - Méthode 3 : Intégration par parties
— Savoir-faire - Méthode 4 : Changement de variables

- Truc & Astuce pour le calcul - Reconnaitre des sommes de Riemann à pas constant : limite
- Truc & Astuce pour le calcul - Reconnaitre des sommes de Riemann à pas constant : vitesse de convergence
- Savoir-faire - A chaque problème sa jauge
- Savoir-faire - Trouver la jauge pour une fonction f admettant une primitive F
- Savoir-faire - Etudier $x \mapsto \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$
- Savoir-faire - Utilisation des différentes formules (de Taylor)

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\sigma_p = \big(([x_{k-1},x_k],t_k), k\in\mathbb{N}_n\big)$	Subdivision pointée de $[x_0,x_n]$	$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ et $\forall\, k\in\mathbb{N}_n$, $t_k \in [x_{k-1},x_k]$	t_k est le point de marquage de $[x_{k-1},x_k]$.
σ_p est δ-fine	(ou adaptée à la jauge $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$) $[x_{k-1},x_k] \subset [t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}]$	$\forall\, k\in\mathbb{N}_n$, $0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta(t_k)$	si δ constante, on la note δ^*
$s_p = \big(([x_{i-1},x_i],t_i), i\in I\big)$	Sous-subdivision (pointée) de σ_p. ($I\subset\mathbb{N}_n$)	Exploitée pour le lemme de Henstock	I : appui de s_p et $\mathscr{D}(s_p) = \bigcup_{i\in I}[x_{i-1},x_i]$: domaine de s_p.
$S(f,\sigma_p)$	Somme de Cauchy/Riemann de f pour la subdivision pointée σ_p	$S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_{k+1}-x_k)$	Cas particuliers : $R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{k}{n}(b-a))$, $S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{1} f(a+\frac{k}{n}(b-a))$
$\lim\limits_{\delta(\sigma_p)\to 0} S(f,\sigma_p) = I$	f est KH-intégrable d'intégrale égale à I	$\forall\,\epsilon>0$, $\exists\,\delta : [a,b] > 0$ tq $\forall\,\sigma_p$ δ-fine, $\lvert S(f,\sigma_p) - I\rvert \leqslant \epsilon$	Si δ constant (δ^*) on parle de R-intégrale.
$(\varphi_n) \overset{c.s.}{\to} f$	(φ_n) converge simplement vers f	$\forall\,\epsilon>0$, $\forall\, x\in I$, $\exists\, N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\, n\geqslant N$, $\lvert f(x)-\varphi_n(x)\rvert \leqslant \epsilon$	Ou encore : $\forall\, x\in I$, $(\varphi_n)(x) \to f(x)$
$(\varphi_n) \overset{c.u.}{\to} f$	(φ_n) converge uniformément vers f	$\forall\,\epsilon>0$, $\exists\, N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\, x\in I$, $\forall\, n\geqslant N$, $\lvert f(x)-\varphi_n(x)\rvert \leqslant \epsilon$	Si $(\varphi_n) \overset{c.u.}{\to} f$ alors $(\varphi_n) \overset{c.s.}{\to} f$
$\mathscr{E}([a,b])$, $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a,b])$, $\mathscr{B}([a,b]$	Respectivement algèbre des fonctions en escalier, continues par morceaux, bornées sur le segment $[a,b]$	$\mathscr{E}([a,b]) \subset \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a,b]) \subset \mathscr{B}([a,b]$	.
$\mathscr{I}_{\mathscr{R}}([a,b])$, $\mathscr{I}([a,b])$	Respectivement espace vectoriel des fonctions Riemann-intégrable, Kurzweil-Henstock-intégrable sur le segment $[a,b]$	$\mathscr{I}_{\mathscr{R}}([a,b]) \subset \mathscr{I}([a,b])$	

Retour sur les problèmes

161. Cours
162. Cours
163. C'est un gros ensemble, complet par ailleurs à condition d'élargir la continuité à la continuité presque partout...
164. La partie 6. du cours, hors-programme tente de répondre à cette question
165. Pas de question. L'inégalité de la moyenne (quitte à la couper en morceaux) donne un résultat d'encadrement intégral! C'est souvent lui qu'on retrouve à l'origine des résultats d'encadrement ou des calculs de limite en analyse.