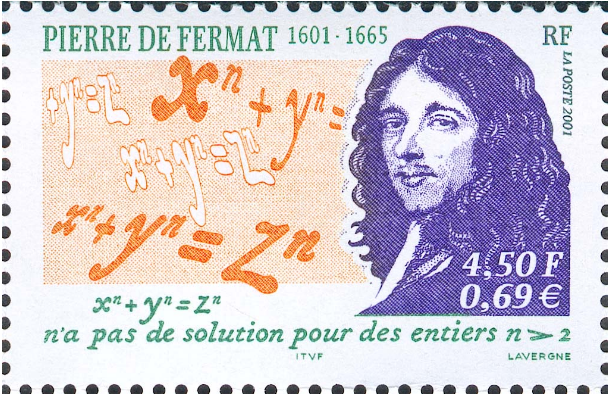

Leçon 92 - Déterminants

6 mai 2025

Problèmes

Existe-t-il une « fonction »qui indique par un calcul, pour toute matrice, si celle-ci est inversible ou non ?

Problèmes

Existe-t-il une « fonction »qui indique par un calcul, pour toute matrice, si celle-ci est inversible ou non ?

Problème Réflexion selon la dimension

Problèmes

Existe-t-il une « fonction »qui indique par un calcul, pour toute matrice, si celle-ci est inversible ou non ?

Problème Réflexion selon la dimension

Problème Réflexion selon la famille de colonnes

Problèmes

Problème Signification de la valeur du déterminant

Problèmes

Problème Signification de la valeur du déterminant

Problème Multiplicativité de la fonction déterminant ?

Problèmes

Problème Signification de la valeur du déterminant

Problème Multiplicativité de la fonction déterminant ?

Problème Inversion d'une matrice avec le déterminant (Système de Cramer).

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions aux familles de vecteurs, aux matrices

Formes n-linéaires

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition - Application n-linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que $\Phi : E^n \to F$ est une application n-linéaire si

$$\forall (X_1, \ldots, X_n) \in E^n, \forall (X, Y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\ i \in [\![1, n]\!]$$
$$\Phi(X_1, \ldots, X_{i-1}, \lambda X + \mu Y, X_{i+1}, \ldots, X_n)$$
$$= \lambda \Phi(\ldots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \ldots) + \mu \Phi(\ldots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \ldots)$$

i.e. : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\Phi_i : X \mapsto \Phi(X_1, \ldots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ est linéaire.
On note $\mathscr{L}_n(E, F)$ l'ensemble des app. n-linéaires de E^n dans F.

Formes n-linéaires

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition - Application n-linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que $\Phi : E^n \to F$ est une application n-linéaire si

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \forall (X,Y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\ i \in [\![1,n]\!]$$
$$\Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, \lambda X + \mu Y, X_{i+1}, \dots, X_n)$$
$$= \lambda \Phi(\dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots) + \mu \Phi(\dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots)$$

i.e. : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\Phi_i : X \mapsto \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_n)$ est linéaire.
On note $\mathscr{L}_n(E,F)$ l'ensemble des app. n-linéaires de E^n dans F.

Définition - Forme n-linéaire

Si Φ est une application n-linéaire de E^n dans $\mathbb{K}$,
on dit que Φ est une forme n-linéaire sur E. ($\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K}) = \mathscr{L}_n(E)$)

Symétrique/antisymétrique

Définition -Forme n-linéaire symétrique ou antisymétrique

On dit que Φ, forme n-linéaire sur E, est :

- symétrique si $\forall \sigma \in S_n, \forall (X_1, \ldots, X_n) \in E^n,$
  $$\Phi(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = \Phi(X_1, \ldots, X_n)$$
- antisymétrique si $\forall \sigma \in S_n, \forall (X_1, \ldots, X_n) \in E^n,$
  $$\Phi(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(X_1, \ldots, X_n)$$

Symétrique/antisymétrique

Proposition - Caractérisation et permutation

Φ est symétrique si et seulement si, lorsque l'on échange deux vecteurs quelconques, le résultat est inchangé.
Φ est antisymétrique si et seulement si, lorsque l'on échange deux vecteurs quelconques, le résultat est transformé en son opposé.

Symétrique/antisymétrique

Proposition - Caractérisation et permutation

Φ est symétrique si et seulement si, lorsque l'on échange deux vecteurs quelconques, le résultat est inchangé.
Φ est antisymétrique si et seulement si, lorsque l'on échange deux vecteurs quelconques, le résultat est transformé en son opposé.

Démonstration

Forme alternée

Définition - Forme n-linéaire alternée

Une forme n-linéaire Φ sur E est dite alternée si

$$\forall i \neq j \in [\![1,n]\!], X_i = X_j \Rightarrow \Phi(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_j,\ldots,X_n) = 0.$$

Forme alternée et antisymétrie

Théorème - Equivalence : alternée et antisymétrique

Soit Φ une forme n-linéaire sur E. Alors on a

$$\Phi \text{ antisymétrique } \Longleftrightarrow \Phi \text{ alternée}$$

Forme alternée et antisymétrie

Théorème - Equivalence : alternée et antisymétrique

Soit Φ une forme n-linéaire sur E. Alors on a

$$\Phi \text{ antisymétrique} \iff \Phi \text{ alternée}$$

Démonstration

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions aux familles de vecteurs, aux matrices

Image d'une base

On sait qu'une application linéaire est parfaitement définie par l'image d'une base. Qu'en est-il d'une forme n-linéaire (antisymétrique) ?

Image d'une base

On sait qu'une application linéaire est parfaitement définie par l'image d'une base. Qu'en est-il d'une forme n-linéaire (antisymétrique) ?

Analyse Ecriture sur une base pour une forme alternée

Image d'une base

Cette analyse donne la démonstration de la proposition suivante :

Proposition - Ecriture selon une base

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. $n \geqslant 2$, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On considère $\Phi \in \mathscr{A}_n(E)$ (forme n-linéaire alternée).
Soit $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$. Alors

$$\Phi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \ldots x_{\sigma(n)n} \epsilon(\sigma) \Phi(e_1, \ldots, e_n)$$

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions aux familles de vecteurs, aux matrices

Définition

Définition - Déterminant de n vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n vecteurs de E, $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}_{\mathscr{E}}$.

On appelle déterminant de $(X_1, \ldots, X_n)$ dans la base $\mathscr{E}$ le scalaire

$$\det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n}.$$

On note $\det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}$.

Définition

Définition - Déterminant de n vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n vecteurs de E, $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}_{\mathscr{E}}$.

On appelle déterminant de $(X_1, \ldots, X_n)$ dans la base $\mathscr{E}$ le scalaire

$$\det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n}.$$

On note $\det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}$.

Remarque Pour $n = 2$ ou $n = 3$ on a

Forme alternée

Théorème - Propriété (essentielle) du déterminant

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\begin{array}{rlll} \det_{\mathscr{E}} : & E^n & \to \mathbb{K} \\ & (X_1, \ldots, X_n) & \mapsto \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) \end{array}$$

est une forme n-linéaire alternée telle que $\det_{\mathscr{E}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Forme alternée

Théorème - Propriété (essentielle) du déterminant

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\begin{array}{rcl} \det_{\mathscr{E}} : & E^n & \to \mathbb{K} \\ & (X_1, \ldots, X_n) & \mapsto \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) \end{array}$$

est une forme n-linéaire alternée telle que $\det_{\mathscr{E}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Démonstration

Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$

Théorème - Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Alors l'ensemble $\mathscr{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle, engendrée par $\det_{\mathscr{E}}$.

$\det_{\mathscr{E}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée Φ telle que $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$, les autres formes n-linéaires alternées lui sont proportionnelles.

Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$

Théorème - Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors l'ensemble $\mathscr{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle, engendrée par $\det_{\mathscr{E}}$.
$\det_{\mathscr{E}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée Φ telle que $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$, les autres formes n-linéaires alternées lui sont proportionnelles.

Démonstration

Lien avec les bases

Théorème - Changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E. Soit $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$. Alors $\det_{\mathscr{E}'}(X_1, \ldots, X_n) = \det_{\mathscr{E}'}(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n)$ c'est-à-dire $\det_{\mathscr{E}'} = \det_{\mathscr{E}'}(\mathscr{E}) \times \det_{\mathscr{E}}$

Lien avec les bases

Théorème - Changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E. Soit $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$. Alors $\det_{\mathscr{E}'}(X_1, \ldots, X_n) = \det_{\mathscr{E}'}(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n)$ c'est-à-dire $\det_{\mathscr{E}'} = \det_{\mathscr{E}'}(\mathscr{E}) \times \det_{\mathscr{E}}$

Démonstration

Lien avec les bases

Théorème - Caractérisation des bases

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$\mathscr{B} \text{ base de } E \Longleftrightarrow \det_{\mathscr{E}}(\mathscr{B}) \neq 0$$

Lien avec les bases

Théorème - Caractérisation des bases

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $\mathscr{B} = (X_1, \dots, X_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$\mathscr{B} \text{ base de } E \iff \det_{\mathscr{E}}(\mathscr{B}) \neq 0$$

Démonstration

Orientation

Définition - Orientation d'un espace

Soit $\mathscr{B}_0$ une base donnée de E et $\mathscr{B}$ une autre base. On sait que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) \neq 0$.
Les bases de E se classent donc en deux ensembles : celles telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$ et celles telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$.
On oriente donc E en choisissant une base $\mathscr{B}_0$ de référence qui sera dite directe,
les bases $\mathscr{B}$ telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$ sont dites directes,
les bases $\mathscr{B}$ telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$ sont dites indirectes.

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

- Propriétés essentielles :
  - La n-linéarité
  - La propriété d'être alternées

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

- Propriétés essentielles :
  - La n-linéarité
  - La propriété d'être alternées
- Donc l'antisymétrie.

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

- Propriétés essentielles :
  - La n-linéarité
  - La propriété d'être alternées
- Donc l'antisymétrie.
- Or L'espace des formes n-linéaires alternées définies sur E est un espace vectoriel de dimension 1.

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Déterminants
  3. Déterminant & 4. Calculs et applications .
- Exercice n°614 & 618