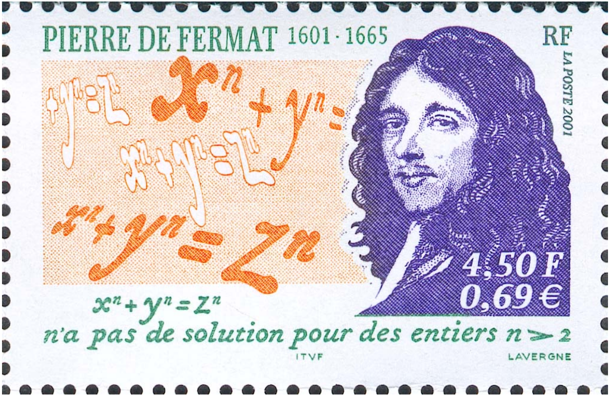

Leçon 93 - Déterminants

7 mai 2025

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Endomorphisme
   - 3.3. Matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme polynôme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Déterminant d'un endomorphisme
   - 3.3. Déterminant d'une matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Déterminant d'un endomorphisme
   - 3.3. Déterminant d'une matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Définition

Définition - Déterminant de n vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soient $X_1, \dots, X_n$ n vecteurs de E, $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}_{\mathscr{E}}$.

On appelle déterminant de $(X_1, \dots, X_n)$ dans la base $\mathscr{E}$ le scalaire

$$\det_{\mathscr{E}}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}.$$

On note $\det_{\mathscr{E}}(X_1, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$

Théorème - Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors l'ensemble $\mathscr{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle, engendrée par $\det_{\mathscr{E}}$.
$\det_{\mathscr{E}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée Φ telle que $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$, les autres formes n-linéaires alternées lui sont proportionnelles.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Lien avec les bases

Théorème - Changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E. Soit $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$. Alors
$\det_{\mathscr{E}'}(X_1, \ldots, X_n) = \det_{\mathscr{E}'}(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n)$
c'est-à-dire $\det_{\mathscr{E}'} = \det_{\mathscr{E}'}(\mathscr{E}) \times \det_{\mathscr{E}}$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Lien avec les bases

Théorème - Changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ des bases de E. Soit $(X_1, \dots, X_n) \in E^n$. Alors
$\det_{\mathscr{E}'}(X_1, \dots, X_n) = \det_{\mathscr{E}'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \dots, X_n)$
c'est-à-dire $\det_{\mathscr{E}'} = \det_{\mathscr{E}'}(\mathscr{E}) \times \det_{\mathscr{E}}$

Démonstration

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Lien avec les bases

Théorème - Caractérisation des bases

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$\mathscr{B} \text{ base de } E \Longleftrightarrow \det_{\mathscr{E}}(\mathscr{B}) \neq 0$$

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Lien avec les bases

Théorème - Caractérisation des bases

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$\mathscr{B} \text{ base de } E \Longleftrightarrow \det_{\mathscr{E}}(\mathscr{B}) \neq 0$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Orientation

Définition - Orientation d'un espace

Soit $\mathscr{B}_0$ une base donnée de E et $\mathscr{B}$ une autre base. On sait que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) \neq 0$.
Les bases de E se classent donc en deux ensembles : celles telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$ et celles telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$.
On oriente donc E en choisissant une base $\mathscr{B}_0$ de référence qui sera dite directe,
les bases $\mathscr{B}$ telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$ sont dites directes,
les bases $\mathscr{B}$ telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$ sont dites indirectes.

Leçon 93 - Déterminants

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Déterminant d'un endomorphisme
   - 3.3. Déterminant d'une matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Défintiion

Définition - Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Le scalaire $\det_{\mathscr{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est indépendant de $\mathscr{E}$. On le note $\det(u)$ ou $\det u$ (déterminant de l'endomorphisme u) et

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \dots, u(X_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \dots, X_n).$$

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Défintiion

Définition - Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Le scalaire $\det_{\mathscr{E}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est indépendant de $\mathscr{E}$. On le note $\det(u)$ ou $\det u$ (déterminant de l'endomorphisme u) et

$$\forall (X_1, \ldots, X_n) \in E^n, \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \ldots, u(X_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n).$$

Il faut faire une démonstration, bien que ce soit une définition : l'indépendance selon la base.

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Définition

Définition - Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Le scalaire $\det_{\mathscr{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est indépendant de $\mathscr{E}$. On le note $\det(u)$ ou $\det u$ (déterminant de l'endomorphisme u) et

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \dots, u(X_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \dots, X_n).$$

Il faut faire une démonstration, bien que ce soit une définition : l'indépendance selon la base.

Démonstration

On montre que $\Phi_u : (X_1, \dots X_n) \mapsto \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \dots u(X_n))$ est forme n-linéaire alternée.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Propriétés

Proposition - Premiers résultats

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n.

Alors

- $\det Id_E = 1$
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
- $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Propriétés

Proposition - Premiers résultats

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n.
Alors

- $\det Id_E = 1$
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
- $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$

Démonstration

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
   3.1. Déterminant de n vecteurs
   3.2. Endomorphisme
   3.3. Matrice
   3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
   4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   4.2. Déterminant de matrices par blocs
   4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   4.4. Calcul de l'inverse
   4.5. Déterminant comme polynôme

Inverse d'un endomorphisme

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0$.
De plus, si $u \in GL(E)$ alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Inverse d'un endomorphisme

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0$.
De plus, si $u \in GL(E)$ alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Inverse d'un endomorphisme

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0$.
De plus, si $u \in GL(E)$ alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Démonstration

Attention - Non linéarité (par rapport à l'endomorphisme)

$\det(u+v)$ est en général différent de $\det u + \det v$.
Contre-exemple à avoir en tête :

$$\det(Id_E + Id_E) = \det(2Id_E) = 2^n \neq 1+1 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Inverse d'un endomorphisme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0$.
De plus, si $u \in GL(E)$ alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Démonstration

Attention - Non linéarité (par rapport à l'endomorphisme)

$\det(u+v)$ est en général différent de $\det u + \det v$.
Contre-exemple à avoir en tête :

$$\det(Id_E + Id_E) = \det(2Id_E) = 2^n \neq 1+1 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Remarque Morphisme de groupes
$\det_{|GL(E)}$ est un morphisme du groupe $GL(E)$ sur le groupe $\mathbb{K}^*$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Déterminant d'un endomorphisme
   - 3.3. Déterminant d'une matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Définition

Définition - Déterminant d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A (éléments de $\mathbb{K}^n$).
On pose alors
$\det A = \det_{\mathscr{E}}(C_1, \dots, C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$,

$$\text{noté } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Savoir-faire

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Truc & Astuce pour le calcul - Cas $n = 2$ ou $n = 3$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1}.$$

Lien avec l'endomorphisme

Théorème - Commutativité de det et de $u \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{E}}(u)$. Alors $\det u = \det A$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Lien avec l'endomorphisme

Théorème - Commutativité de det et de $u \mapsto \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathscr{E}}(u)$. Alors $\det u = \det A$

Démonstration

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Premières propriétés

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Proposition - Premières propriétés

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $\det I_n = 1$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- A est inversible ssi $\det A \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- deux matrices semblables ont même déterminant
- $\det({}^tA) = \det A$

Premières propriétés

Proposition - Premières propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $\det I_n = 1$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- A est inversible ssi $\det A \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- deux matrices semblables ont même déterminant
- $\det({}^t A) = \det A$

Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Corollaire

Corollaire - Déterminant en lignes

Si $L_1,\ldots,L_n$ désignent les lignes de A, alors $\det A$ est le déterminant des vecteurs lignes de A i.e.
$\det A = \det({}^tL_1,\ldots,{}^tL_n)$.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Corollaire

Corollaire - Déterminant en lignes

Si $L_1,\ldots,L_n$ désignent les lignes de A, alors $\det A$ est le déterminant des vecteurs lignes de A i.e. $\det A = \det({}^tL_1,\ldots,{}^tL_n)$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

 3.1. Déterminant de n vecteurs

 3.2. Déterminant d'un endomorphisme

 3.3. Déterminant d'une matrice

 3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants

 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

 4.2. Déterminant de matrices par blocs

 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

 4.4. Calcul de l'inverse

 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Exercice

<u>Exercice</u>

On note $E = \mathbb{R}^3$. Soit $a, b, c \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$\det(f(a), b, c) + \det(a, f(b), c) + \det(a, b, f(c)) = \operatorname{tr}(f) \times \det(a, b, c)$$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
   3.1. Déterminant de n vecteurs
   3.2. Endomorphisme
   3.3. Matrice
   3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
   4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   4.2. Déterminant de matrices par blocs
   4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   4.4. Calcul de l'inverse
   4.5. Déterminant comme polynôme

Savoir-faire

Savoir-faire. Liste de bonnes habitudes

1. On ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un des vecteurs colonnes (resp. lignes) une combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes (resp.lignes).
2. Le déterminant d'une matrice dépend linéairement de chacun des vecteurs colonnes (resp. lignes).
3. Si on effectue une permutation σ sur les vecteurs colonnes (resp. lignes) le déterminant est multipliés par $\epsilon(\sigma)$ (par -1 dans le cas d'un échange de deux colonnes ou deux lignes)
4. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
- 3.1. Déterminant de n vecteurs
- 3.2. Endomorphisme
- 3.3. Matrice
- 3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications
- 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
- 4.2. Déterminant de matrices par blocs
- 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
- 4.4. Calcul de l'inverse
- 4.5. Déterminant comme polynôme

Exemples

Exemple Opération sur les colonnes

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Exemples

Exemple Opération sur les colonnes

Exemple Dépendance linéaire

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Exemples

Exemple Opération sur les colonnes

Exemple Dépendance linéaire

On démontre le résultat concernant les matrices diagonales.

Démonstration

Exemples

Exemple Opération sur les colonnes

Exemple Dépendance linéaire

On démontre le résultat concernant les matrices diagonales.

Démonstration

<u>Exercice</u>

Avec les règles précédentes, montrer que

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Déterminant d'un endomorphisme
   - 3.3. Déterminant d'une matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Formule de Cramer

Proposition - Formule de Cramer

Considérons le système $AX = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$[X]_i = \frac{\det(C_1(A), \dots C_{i-1}(A), b, C_{i+1}(A), \dots C_n(A)}{\det A}.$$

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Formule de Cramer

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Proposition - Formule de Cramer

Considérons le système $AX = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$[X]_i = \frac{\det(C_1(A), \dots C_{i-1}(A), b, C_{i+1}(A), \dots C_n(A))}{\det A}.$$

Démonstration

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Déterminant d'un endomorphisme

3.3. Déterminant d'une matrice

3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Déterminant de matrices par blocs

Proposition - Matrices triangulaires par blocs

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées. Alors on a

$$\det M = \det A \det B.$$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de matrices par blocs

Proposition - Matrices triangulaires par blocs

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées. Alors on a

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de matrices par blocs

Proposition - Matrices triangulaires par blocs

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées. Alors on a

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration

Remarque Transposé

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Déterminant d'un endomorphisme

3.3. Déterminant d'une matrice

3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Cas d’une matrice triangulaire

En appliquant alors par récurrence le résultat précédent, on obtient la

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l’inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Cas d’une matrice triangulaire

En appliquant alors par récurrence le résultat précédent, on obtient la

Proposition - Déterminant d’une matrice triangulaire

Le déterminant d’une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l’inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Cas d’une matrice triangulaire

En appliquant alors par récurrence le résultat précédent, on obtient la

Proposition - Déterminant d’une matrice triangulaire

Le déterminant d’une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
- 3.1. Déterminant de n vecteurs
- 3.2. Endomorphisme
- 3.3. Matrice
- 3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications
- 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
- 4.2. Déterminant de matrices par blocs
- 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
- 4.4. Calcul de l’inverse
- 4.5. Déterminant comme polynôme

Mineur. Cofacteur

Définition - Mineur et cofacteur

On appelle mineur d'indice (i, j) de A le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.
On appelle cofacteur d'indice (i, j) le produit du mineur d'indice (i, j) par $(-1)^{i+j}$.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème - Calcul du déterminant par développement

Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, $A_{i,j}$ désignant le cofacteur d'indice (i,j) dans la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{i,k} \qquad \text{développement suivant la k-ième colonne}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{k,j} \qquad \text{développement suivant la k-ième ligne}$$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème - Calcul du déterminant par développement

Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, $A_{i,j}$ désignant le cofacteur d'indice (i,j) dans la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{i,k}$ développement suivant la k-ième colonne

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{k,j}$ développement suivant la k-ième ligne

Démonstration

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Exercices

Exercice

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Exercices

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

<u>Exercice</u>

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

<u>Exercice</u>

Soit $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Déterminer une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}, en déduire D_n.

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Déterminant d'un endomorphisme
   - 3.3. Déterminant d'une matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

$\det A$ et cofacteurs

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition - Relation linéaire

$$\forall j,k \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{j,k} \det A$$

$$\forall i,k \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{i,k} \det A$$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Endomorphisme
   - 3.3. Matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme polynôme

$\det A$ et cofacteurs

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition - Relation linéaire

$$\forall j,k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \delta_{j,k} \det A$$

$$\forall i,k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{i,k} \det A$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Comatrice

Définition - Comatrice

La matrice $(A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est appelée la comatrice de A et notée $\mathrm{Com}A$.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Comatrice

Définition - Comatrice

La matrice $(A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est appelée la comatrice de A et notée $\mathrm{Com} A$.

Théorème - Expression de A^{-1} avec la comatrice

$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), A \times {}^t\mathrm{Com}A = {}^t\mathrm{Com}A \times A = (\det A)I_n.$

Donc, si $\det A \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}A.$

Démonstration

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

En pratique ?

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) \neq 0$. Déterminer A^{-1}.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

En pratique ?

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) \neq 0$. Déterminer A^{-1}.

Savoir-faire. Utilisation de A^{-1} avec la comatrice

Mis à part pour $n = 2$, on n'utilise pas cette formule pour calculer A^{-1} car les calculs sont trop longs. Quelle est leur complexité ? $n! \times n$ pour δ et $(n-1)! \times (n-1)$ par chacun des n^2 coefficients. Donc au total $O(n^2 \times n!)$...

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
   - 3.1. Déterminant de n vecteurs
   - 3.2. Déterminant d'un endomorphisme
   - 3.3. Déterminant d'une matrice
   - 3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Savoir-faire

Savoir-faire. S'il y a un x comme coefficient(s) de A

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,\sigma(i)}(A).$$

Si x^k se glisse parmi les coefficients de A_x, alors $\det A_x$ est nécessairement une fonction polynomiale en x. On peut alors :

1. chercher son degré (d), en organisant bien notre réflexion
2. trouver des valeurs particulières pour des valeurs de x particulières et en nombre suffisant ($\geqslant d$) pour en déduire une expression directe et explicite du déterminant

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de Vandermonde

On va utiliser cette analyse pour démontrer la proposition suivante (déterminant de Vandermonde)

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de Vandermonde

On va utiliser cette analyse pour démontrer la proposition suivante (déterminant de Vandermonde)

Proposition - Déterminant de Vandermonde

On note $A(x_1, x_2, .., x_n)$ la matrice qui suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $V(x_1, x_2, .., x_n)$ le déterminant cette matrice. Alors

$$V(x_1, x_2, .., x_n) = \prod_{(i,j) | 1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de Vandermonde

On va utiliser cette analyse pour démontrer la proposition suivante (déterminant de Vandermonde)

Proposition - Déterminant de Vandermonde

On note $A(x_1, x_2, .., x_n)$ la matrice qui suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $V(x_1, x_2, .., x_n)$ le déterminant cette matrice. Alors

$$V(x_1, x_2, .., x_n) = \prod_{(i,j) | 1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Démonstration

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Application du déterminant de Vandermonde

Corollaire - Inversibilité de la matrice Vandermonde

$A(x_1, x_2, .., x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Application du déterminant de Vandermonde

Corollaire - Inversibilité de la matrice Vandermonde

$A(x_1, x_2, .., x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.
On note $e_k : x \mapsto e^{\lambda_k x}$.
Montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots e_k)$ est libre si et seulement si $\forall\ i \neq j \leqslant n,\ \lambda_i \neq \lambda_j$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients. Application au déterminant de Vandermonde

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients.
Application au déterminant de Vandermonde
- Formule théorique d'inversion d'une matrice avec la comatrice.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

3.2. Endomorphisme

3.3. Matrice

3.4. Conséquences pratiques

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
  $$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients.
  Application au déterminant de Vandermonde
- Formule théorique d'inversion d'une matrice avec la comatrice.
- Quel lien entre le $\mathrm{rg}(A)$ et $\det$?

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 35 : Séries
- Exercice n°625, 629 & 631
- TD :
  jeudi 8h-10h : 615, 626, 622, 634, 641
  jeudi 10h-12 : 616, 627, 628, 635, 643

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
3.1. Déterminant de n vecteurs
3.2. Endomorphisme
3.3. Matrice
3.4. Conséquences pratiques
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme