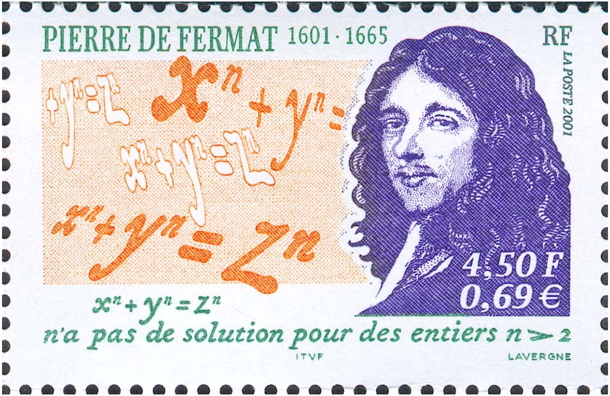


Leçon 94 - Séries numériques

13 mai 2025

⇒ Définitions
⇒ Premières propriétés
1. Problèmes
2. Généralités
2.1. Définitions
2.2. Propriétés
2.3.Telescopage
2.4. Opérations pour des séries convergentes
2.5. Un cas classique : les séries de signe alterné

Problèmes

Problème Convergence décimale

$u_{n+1} = u_n + 10^{-n} d_n$ avec $d_n \in \{0, 1, \ldots 9\}$

Problèmes

Problème Convergence décimale

$u_{n+1} = u_n + 10^{-n} d_n$ avec $d_n \in \{0, 1, \ldots 9\}$

Problème Etudier une suite définie par récurrence

$u_{n+1} = v_n u_n + w_n$

Problèmes

Problème Convergence décimale

$u_{n+1} = u_n + 10^{-n} d_n$ avec $d_n \in \{0, 1, \dots 9\}$

Problème Etudier une suite définie par récurrence

$$u_{n+1} = v_n u_n + w_n$$

$$a_{n+1} := \frac{u_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n} v_k} = a_n + \frac{w_n}{\prod_{k=1}^{n} v_k}.$$

Et donc $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \dots$

Problèmes

Problème Convergence décimale

$u_{n+1} = u_n + 10^{-n} d_n$ avec $d_n \in \{0, 1, \dots 9\}$

Problème Etudier une suite définie par récurrence

$u_{n+1} = v_n u_n + w_n$

Problème Reconnaissance de la convergence

Problèmes

Problème Convergence décimale

$u_{n+1} = u_n + 10^{-n} d_n$ avec $d_n \in \{0, 1, \ldots 9\}$

Problème Etudier une suite définie par récurrence

$u_{n+1} = v_n u_n + w_n$

Problème Reconnaissance de la convergence

Problème $U_n = \sum_{n=1}^{?} u_n$ est comme une intégrale.

Que devient l'intégration par partie : $\sum_{k=1}^{n} u_k (v_{k+1} - v_k)$?

⇒ Définitions

⇒ Premières propriétés

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définitions

2.2. Propriétés

2.3.Telescopage

2.4. Opérations pour des séries convergentes

2.5. Un cas classique : les séries de signe alterné

Séries

Définition - Séries

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$.

On note $\sum u_n$ (ou $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$) la série de t.g. u_n, à la place de (S_n).

Le nombre S_n s'appelle la **somme partielle** d'ordre n ou n-ième somme partielle.

Séries

Définition - Séries

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.
On pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$.
On note $\sum u_n$ (ou $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$) la série de t.g. u_n, à la place de (S_n).
Le nombre S_n s'appelle la **somme partielle** d'ordre n ou n-ième somme partielle.

Remarque Une série est une suite. . .

Séries

Définition - Séries

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$.

On note $\sum u_n$ (ou $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$) la série de t.g. u_n, à la place de (S_n).

Le nombre S_n s'appelle la **somme partielle** d'ordre n ou n-ième somme partielle.

Remarque Une série est une suite…

Très couramment, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Convergence

Définition - Convergence, limite

- La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si (S_n) est convergente.

Dans le cas contraire on dit que $\sum u_n$ est **divergente**.

- Si la série est convergente, $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$

est appelée **somme de la série** et est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Convergence

Définition - Convergence, limite

- La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si (S_n) est convergente.

Dans le cas contraire on dit que $\sum u_n$ est **divergente**.

- Si la série est convergente, $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

est appelée **somme de la série** et est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Attention. Écriture (1)

Que signifie chacune des trois notations suivantes :

$$1. \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ ou } \sum u_n \qquad 2. \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \qquad 3. \sum_{n=0}^{N} u_n$$

Restes

Si $(S_n) \to S$

Définition - Suite des restes

$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé **reste** d'ordre n de la série.
On a donc nécessairement $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Restes

Si $(S_n) \to S$

Définition - Suite des restes

$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé **reste** d'ordre n de la série.
On a donc nécessairement $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Attention. Écriture (2)

Pour dire $\sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, nous écrirons R_n ou $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.
Cette dernière écriture semble naturelle, et pourtant elle ne peut exister que si la série converge (*pourquoi ?*).
D'ailleurs si l'on veut calculer le reste R_n d'une série convergente, nous devons nécessairement connaître la limite de la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Critère de Cauchy

Le reste n'existe que si on a montré que la limite existe...
On peut arranger le coup en exploitant le critère de Cauchy.

Critère de Cauchy

Le reste n'existe que si on a montré que la limite existe...
On peut arranger le coup en exploitant le critère de Cauchy.

Critère de Cauchy pour les séries

On peut exploiter les équivalences :
(S_n) converge si et seulement si (S_n) vérifie le critère de Cauchy.

ssi $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}$ tq $\forall\ p > q \geqslant N, |S_p - S_q| \leqslant \epsilon.$

ssi $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}$ tq $\forall\ p > q \geqslant N, |\sum_{n=q}^{p} u_n l \leqslant \epsilon.$

« De même nature »

Définition - Série de même nature

Deux séries sont dites de **même nature** si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

« De même nature »

Définition - Série de même nature

Deux séries sont dites de **même nature** si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Exemple La convergence est indépendante des premiers termes

⇒ Définitions

⇒ Premières propriétés

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définitions

2.2. Propriétés

2.3.Telescopage

2.4. Opérations pour des séries convergentes

2.5. Un cas classique : les séries de signe alterné

Condition nécessaire de convergence

Proposition - Condition nécessaire pour la convergence

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

(la réciproque est fausse !).

Si le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Condition nécessaire de convergence

Proposition - Condition nécessaire pour la convergence

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

(la réciproque est fausse !).

Si le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Démonstration

Condition nécessaire de convergence

Proposition - Condition nécessaire pour la convergence

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

(la réciproque est fausse !).

Si le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Démonstration

Attention. GROSSE ERREUR

La réciproque est absolument fausse. *Comment s'exprime-t-elle ?*
L'exercice suivant donne l'exemple d'une série divergente mais dont le terme général tend néanmoins vers 0.
C'est un exemple à connaître par coeur et à mobiliser rapidement en cas de doute.

Série harmonique

Exercice

On note pour $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de la **série harmonique**.

1. Quelle est la limite de $\left(\frac{1}{n}\right)$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n-1} \geqslant n+1$
3. Conclure que la série diverge.

Intégration

Heuristique. Processus d'intégration

Lorsque l'on souhaite étudier les *variations* d'une fonction, on calcul le *signe* de la dérivée de f.
Lorsque l'on souhaite étudier les *variations* d'une suite, on calcul le *signe* de la suite (v_n) définie par $v_n := u_{n+1} - u_n$.
Si l'on considère qu'il y a d'une certaine façon une équivalence entre la dérivation d'une fonction et la dérivation $(u_n) \mapsto (v_n)$ d'une suite, on peut se demander à quoi correspond la processus inverse de la dérivation, c'est-à-dire l'intégration pour les suites.
Autrement écrit si (v_n) est obtenue en posant pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$, comment faire pour obtenir (u_n) si seule la suite (v_n) est connue ?

C'est très simple : $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k + u_0 \left(= \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) + u_0 \right)$

Exercice

<u>Exercice</u>

Considérons la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$u_0 = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2^n$$

(Cas plus générale que les suites arithmético-géométriques). Cette suite est-elle convergente, quelle est sa limite, peut-on l'exprimer explicitement ? Pour répondre, considérons $v_n = 3^n u_n$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. En utilisant la méthode du télescopage, montrer que v_n peut s'exprimer comme une somme.
3. En déduire une expression de u_n, ainsi qu'un équivalent de (u_n).

Exercice

Analyse L'important ici

Lien suite-série

Proposition - Lien suite-série

La **série** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et la **suite** (u_n) sont de même nature.

Lien suite-série

Proposition - Lien suite-série

La **série** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et la **suite** (u_n) sont de même nature.

Exercice

Dans les cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ et, lorsqu'il y a convergence, calculer la somme de la série.

1. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$;
2. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$;
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$;
4. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;
5. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Cas des séries géométriques

Proposition - Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n, $\sum q^n$, appelée série géométrique de raison q, converge si et seulement $|q| < 1$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Cas des séries géométriques

Proposition - Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n, $\sum q^n$, appelée série géométrique de raison q, converge si et seulement $|q| < 1$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration

Linéarité

Proposition - Opérations sur les séries

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et λ un réel **non nul**. Alors :

• $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature

et en cas de convergence $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$

• Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n + v_n)$ converge

et $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$

• Si l'une des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge et l'autre diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

• Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure quant à la nature de $\sum(u_n + v_n)$.

Linéarité

Proposition - Opérations sur les séries

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et λ un réel **non nul**. Alors :

- $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature

  et en cas de convergence $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum (u_n + v_n)$ converge

  et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.
- Si l'une des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge et l'autre diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure quant à la nature de $\sum (u_n + v_n)$.

Démonstration

Séries à valeurs dans $\mathbb{C}$

Proposition - Séries complexes

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.
Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathbf{Re} u_n$ et $\sum \mathbf{Im} u_n$ convergent

et on a alors : $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{Im} u_n.$$

Séries à valeurs dans $\mathbb{C}$

Proposition - Séries complexes

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.
Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathbf{Re} u_n$ et $\sum \mathbf{Im} u_n$ convergent

et on a alors : $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{Im} u_n.$$

Démonstration

Définition et exemple

Heuristique. Convergence par « adjacence »

On a souvent $u_n = (-1)^n v_n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
Dans ce cas là, la somme partielle S_n augmente, diminue, augmente, diminue. . . .
On peut espérer que cette suite de somme partielle converge, parce que ces suites extraites paires et impaires sont adjacentes.

Définition et exemple

Heuristique. Convergence par « adjacence »

On a souvent $u_n = (-1)^n v_n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
Dans ce cas là, la somme partielle S_n augmente, diminue, augmente, diminue. . . .
On peut espérer que cette suite de somme partielle converge, parce que ces suites extraites paires et impaires sont adjacentes.

Définition - Série alternée

On dit que la série $\sum(-1)^n u_n$ est alternée si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ *ce qui fait que la série est de signe alterné*
- la suite (u_n) est décroissante.
- $\lim(u_n) = 0$

Définition et exemple

Exemple Série harmonique alternée

Définition et exemple

Exemple Série harmonique alternée

Informatique. Visualiser la convergence

Programme informatique simple

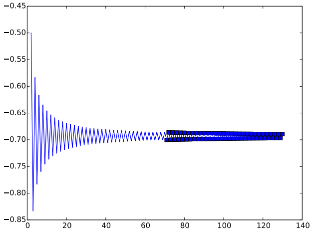
Définition et exemple

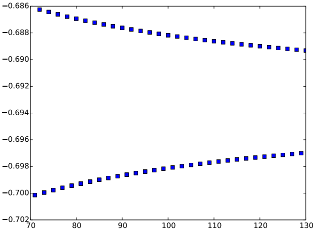
Exemple Série harmonique alternée

Informatique. Visualiser la convergence

Programme informatique simple

Ce qui donne les représentations graphiques suivantes :





Critère de Leibniz

Proposition - Critére de Leibniz

Soit (u_n) décroissante, positive, de limite nulle.
On considère la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$.
Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ (de signe alternés) est convergente.
Par ailleurs, on a l'inégalité de *contrôle* (très importante) :

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u_k - S \right| < u_n$$

où $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est la limite (somme) de la série.

Critère de Leibniz

Démonstration

Critère de Leibniz (Application)

Exercice

Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge (série harmonique alternée).
Jusqu'à quelle valeur de n est-il suffisant de faire le calcul pour avoir une approximation de la limite de cette série à 10^{-5} prés (on peut penser à la rédaction d'un programme informatique d'approximation) ?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définitions

$\Rightarrow$ Premières propriétés

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définitions

- Définition de série et série convergente.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définitions

- Définition de série et série convergente.
- Définition du reste d'une série convergente.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définitions

- Définition de série et série convergente.
- Définition du reste d'une série convergente.
- Série qui ont le même comportement

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définitions

$\Rightarrow$ Premières propriétés

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définitions

$\Rightarrow$ Premières propriétés

- La divergence grossière ou, nécessairement, $u_n \to 0$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définitions

$\Rightarrow$ Premières propriétés

- La divergence grossière ou, nécessairement, $u_n \to 0$.
- Première méthode d'étude : le télescopage

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définitions

$\Rightarrow$ Premières propriétés

- La divergence grossière ou, nécessairement, $u_n \to 0$.
- Première méthode d'étude : le télescopage
- Stabilité de la convergence par combinaison linéaire.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définitions

⇒ Premières propriétés

- La divergence grossière ou, nécessairement, $u_n \to 0$.
- Première méthode d'étude : le télescopage
- Stabilité de la convergence par combinaison linéaire.
- Critère de Leibniz pour les séries de signe alterné

Conclusion

Objectifs

⇒ Définitions

⇒ Premières propriétés

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 38 : Séries numériques
  3. Série à termes positifs
- Exercice : 805, 809
- TD de vendredi :
  n°796, 798, 801, 806, 803, 804, 808