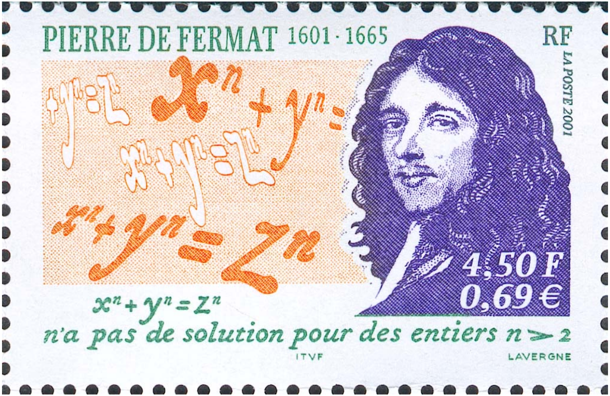

Leçon 95 - Séries numériques

15 mai 2025

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

⇒ Mener l'étude d'une série

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

⇒ Mener l'étude d'une série

1. Problèmes

2. Généralités

3. Séries à termes positifs

3.1. Majoration des sommes partielles

3.2. Comparaison des séries à termes positifs

3.3. Exploitation des séries de Riemann

3.4. Séries absolument convergentes

4. Plan d'étude d'une série et série de référence

4.1. Plan d'étude

4.2. Comparaison série-intégrale

4.3. Séries de référence

Motivations

Heuristique. Motivations

Il y a plusieurs raisons qui motivent l'étude des séries positives.

Motivations

Heuristique. Motivations

Il y a plusieurs raisons qui motivent l'étude des séries positives.

1. La première est qu'ainsi on peut utiliser facilement le théorème de convergence monotone (des suites), puisque la suite des sommes partielles et dans ce cas une suite croissante.

Motivations

Heuristique. Motivations

Il y a plusieurs raisons qui motivent l'étude des séries positives.

1. La première est qu'ainsi on peut utiliser facilement le théorème de convergence monotone (des suites), puisque la suite des sommes partielles et dans ce cas une suite croissante.
2. La seconde est que les séries absolument convergentes (donc à termes positives) donne une condition suffisante pour l'étude de la convergence des séries.

Motivations

Heuristique. Motivations

Il y a plusieurs raisons qui motivent l'étude des séries positives.

1. La première est qu'ainsi on peut utiliser facilement le théorème de convergence monotone (des suites), puisque la suite des sommes partielles et dans ce cas une suite croissante.
2. La seconde est que les séries absolument convergentes (donc à termes positives) donne une condition suffisante pour l'étude de la convergence des séries.
3. Et même si on se place dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ (on accepte des limite égale à l'infini), on peut affirmer que toute série à termes positifs est convergente. C'est ce qu'on fait dans la définition de l'intégrale de Lebesgue...

Théorème de convergence dominée

Théorème - Condition simple de convergence

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(Il suffit en fait que $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.)

$\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée (c'est-à-dire s'il existe M tel que $\forall n, S_n \leqslant M$).

Dans le cas contraire on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Théorème de convergence dominée

Théorème - Condition simple de convergence

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(Il suffit en fait que $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.)

$\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée (c'est-à-dire s'il existe M tel que $\forall n, S_n \leqslant M$).

Dans le cas contraire on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Démonstration

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

⇒ Mener l'étude d'une série

Critères de convergence (sans connaître S)

Théorème - Inégalités

On suppose qu'à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

$$\left(\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge }\right)$$

et

$$\left(\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge }\right).$$

Critères de convergence (sans connaître S)

Théorème - Inégalités

On suppose qu'à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

$(\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge $)$

et

$(\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge $)$.

Démonstration

Critères de convergence (sans connaître S)

Théorème - Inégalités

On suppose qu'à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

$$\left(\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge }\right)$$

et

$$\left(\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge }\right).$$

Démonstration

Proposition - Majoration par négligeabilité

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$
et que $u_n = O(v_n)$.

Alors

$$\left(\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge }\right)$$

et

$$\left(\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge }\right).$$

Critères de convergence (sans connaître S)

Théorème - Inégalités

On suppose qu'à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

$$\left(\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge }\right)$$

et

$$\left(\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge }\right).$$

Démonstration

Proposition - Majoration par négligeabilité

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

et que $u_n = O(v_n)$.

Alors

$$\left(\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge }\right)$$

et

$$\left(\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge }\right).$$

Démonstration

Critères de convergence (sans connaître S)

Théorème - Équivalents

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Critères de convergence (sans connaître S)

Théorème - Équivalents

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

Mieux !

Exercice

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que

- Si ces séries convergent, les restes sont équivalents,
- Si ces séries divergent, les sommes partielles sont équivalents,

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

⇒ Mener l'étude d'une série

Théorie

Proposition - Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorie

Proposition - Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Théorie

Proposition - Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Exercice

En exploitant l'exercice précédent, donner des équivalents des sommes partielles ou restes des séries de Riemann.

Exploitation des séries de Riemann

Exercice

Étudier la nature de la série de terme général
$u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Savoir-utiliser

Le corollaire suivant est plutôt à considérer comme un savoir-faire.

Corollaire - Méthode du « $n^\alpha u_n$ »

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ réel tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ réel tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Savoir-utiliser

Le corollaire suivant est plutôt à considérer comme un savoir-faire.

Corollaire - Méthode du « $n^\alpha u_n$ »

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ réel tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ réel tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

⇒ Mener l'étude d'une série

1. Problèmes

2. Généralités

3. Séries à termes positifs

3.1. Majoration des sommes partielles

3.2. Comparaison des séries à termes positifs

3.3. Exploitation des séries de Riemann

3.4. Séries absolument convergentes

4. Plan d'étude d'une série et série de référence

4.1. Plan d'étude

4.2. Comparaison série-intégrale

4.3. Séries de référence

Le critère de convergence absolue

Définition - Série absolument convergente

La série $\sum u_n$ ($u_n \in \mathbb{R}$ ou $u_n \in \mathbb{C}$) est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Le critère de convergence absolue

Définition - Série absolument convergente

La série $\sum u_n$ ($u_n \in \mathbb{R}$ ou $u_n \in \mathbb{C}$) est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème - Implication

Une série absolument convergente est convergente.

Contre-exemple

Attention. La réciproque est fausse

On exploite le contre-exemple classique suivant : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

- $\sum u_n$ est convergente.
  Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
  $a_n = u_{2n+1} + u_{2n+2} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-1}{4n^2+6n+2}$.
  $-a_n > 0$, $-a_n \sim \frac{1}{4n^2}$ et $\sum \frac{1}{4n^2}$ converge.
  Donc $\sum a_n$ également.
  Enfin, notons que

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} a_n$$

  Donc par encadrement, la série $\sum u_n$ converge.

Contre-exemple

Attention. La réciproque est fausse

On exploite le contre-exemple classique suivant : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

- $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, cela signifierait que la série harmonique converge.

Le critère de convergence absolue

Définition - Série absolument convergente

La série $\sum u_n$ ($u_n \in \mathbb{R}$ ou $u_n \in \mathbb{C}$) est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème - Implication

Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

⇒ Mener l'étude d'une série

1. Problèmes
2. Généralités
3. Séries à termes positifs
   - 3.1. Majoration des sommes partielles
   - 3.2. Comparaison des séries à termes positifs
   - 3.3. Exploitation des séries de Riemann
   - 3.4. Séries absolument convergentes
4. Plan d'étude d'une série et série de référence
   - 4.1. Plan d'étude
   - 4.2. Comparaison série-intégrale
   - 4.3. Séries de référence

Plan

nature de la suite	terme général	méthode d'étude de la série
(u_n) diverge		$\sum u_n$ diverge
$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$		$\sum u_n$ diverge
$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$	u_n réel, $\forall n, u_n \geqslant 0$	on essaie de comparer avec une série de référence ou on essaie de « voir »un téléescopage ou on essaie de majorer les sommes partielles ou on compare avec une intégrale
	u_n réel, $\forall n, u_n \leqslant 0$	on étudie la série de t.g. $-u_n$
	$u_n = (-1)^n v_n$ si $(v_n) \searrow$ (ou $\nearrow$) (nécessairement $(v_n) \to 0$)	On applique le critère de LEIBNIZ
	u_n réel mais pas de signe constant	on étudie $\sum \lvert u_n \rvert$ avec $\lvert u_n \rvert \geqslant 0$: si $\sum \lvert u_n \rvert$ cv alors $\sum u_n$ cv si $\sum \lvert u_n \rvert$ div : voir au cas par cas
	u_n complexe	on étudie $\sum \lvert u_n \rvert$ avec $\lvert u_n \rvert \geqslant 0$: si $\sum \lvert u_n \rvert$ cv alors $\sum u_n$ cv si $\sum \lvert u_n \rvert$ div : au cas par cas en étudiant $\sum \mathbf{Re} u_n$ et $\sum \mathbf{Im} u_n$

Le tableau sera complété encore l'année prochaine : semi-convergence : convergence de la série et non convergence absolue, critère de d'Alembert…

Comparaison série-intégrale

Lemme - Comparaison directe

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f continue par morceaux, décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors

$$\forall\ n \geqslant n_0 + 1, \qquad \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

Comparaison série-intégrale

Lemme - Comparaison directe

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f continue par morceaux, décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors

$$\forall\ n \geqslant n_0 + 1, \qquad \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition - Même comportement série-intégrale

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f continue par morceaux, positive, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.
Alors $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'application $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Comparaison série-intégrale

Lemme - Comparaison directe

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f continue par morceaux, décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors

$$\forall\ n \geqslant n_0 + 1, \quad \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition - Même comportement série-intégrale

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f continue par morceaux, positive, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.
Alors $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'application $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Démonstration

Utilisation de la comparaison série-intégrale

Savoir-faire. Comment exploiter la comparaison série-intégrale

Si f est monotone à partir d'un certain rang X, alors pour tout $n \geqslant \lfloor X \rfloor + 1$, on a (cas décroissant) : $\forall\ n \geqslant N$,

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_{n}^{N} f(t)\mathrm{d}t \dots$$

Puis, par méthodes supplémentaires sur les calculs intégrales : IPP, changement de variable, utilisation de primitive. . ., on peut transférer par encadrement les informations sur la série $\sum_{k \geqslant N} f(k)$.

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

⇒ Mener l'étude d'une série

1. Problèmes

2. Généralités

3. Séries à termes positifs

3.1. Majoration des sommes partielles

3.2. Comparaison des séries à termes positifs

3.3. Exploitation des séries de Riemann

3.4. Séries absolument convergentes

4. Plan d'étude d'une série et série de référence

4.1. Plan d'étude

4.2. Comparaison série-intégrale

4.3. Séries de référence

Série de référence

Truc & Astuce pour le calcul - Série de référence

- Série de Riemann

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Série géométrique

La série de terme général x^n est convergente si et seulement si $|x| < 1$.

- Série du binôme négatif

Soit $r \in \mathbb{N}$. Si $|x| < 1$, la série $\sum_{k \geqslant r} \binom{k}{r} x^{k-r}$ converge ; $\sum\limits_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

- Série exponentielle

Pour tout x complexe, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge ; $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $x \in]-1,1[$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p^n = \binom{p+n}{p} x^p$. On s'intéresse à la série $T^n = \sum_{p \geqslant 0} a_p^n$.

1. Montrer que la série T^n est convergente.
2. Rappeler la formule du triangle de Pascal.
3. Simplifier (téléscopage) $(1-x)\sum_{p=0}^{N} a_p^n$, en déduire :
$$(1-x)\sum_{p=0}^{+\infty} a_p^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p^{n-1}$$
4. Exprimer T^0, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} x^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{p+n}{n} x^p$$

Exercices

Exercice

Soient les deux suites (S_n) et (S'_n) telles que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } S'_n = \frac{1}{n \cdot n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

Nous admettons qu'elles convergent vers e (voir dernière question).

2. Ecrire un programme en Python utilisant les suites (S_n) et (S'_n) pour calculer une approximation de e à 10^{-6}
3. Soit $x > 0$. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$.
   - 3.1 Montrer que $\left(1 + \frac{x}{n}\right) \geqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{1 \times (1 - \frac{1}{n}) \times \cdots \times (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} x^k$
   - 3.2 En faisant tendre n vers l'infini, en déduire que $e^x \geqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}$.
   - 3.3 En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}\right)_p$ est convergente.
   - 3.4
   - 3.5

Exercices

<u>Exercice</u>

Soient les deux suites (S_n) et (S'_n) telles que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } S'_n = \frac{1}{n \cdot n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

Nous admettons qu'elles convergent vers e (voir dernière question).

2. Ecrire un programme en Python utilisant les suites (S_n) et (S'_n) pour calculer une approximation de e à 10^{-6}
3. Soit $x > 0$. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$.
   - 3.1
   - 3.2
   - 3.3
   - 3.4 Par ailleurs, montrer que $\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1\times(1-\frac{1}{n})\times\cdots\times(1-\frac{k-1}{n})}{k!} x^k$
   - 3.5 En déduire que $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Savoir-faire

Savoir-faire. Calcul exact avec des séries exponentielles

Considérons un polynôme P de degré d (pas trop élevé).

On cherche à calculer la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$ où $x \in \mathbb{R}$.

La famille $\big(1, X, X(X-1), \dots X(X-1)\cdots(X-d)\big)$ est échelonnée, composée de $d+1$ polynômes : elle forme une base de $\mathbb{K}_d[X]$.

Il existe $a_0, a_1, \dots a_d$ tels que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k N_k$ où $N_k = X \cdots (X-k)$.

Alors *par linéarité* : $S = \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{N_k(n)}{n!} x^n \right)$ mais $N_k(n)$ **et** $n!$ **se simplifient**. . .

Application

<u>Exercice</u>

Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 2^n}{n!}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

- CNS de convergence : être bornée.

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

- CNS de convergence : être bornée.
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors $\sum v_n$ converge ⇒ $\sum u_n$ converge.

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

- CNS de convergence : être bornée.
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors $\sum v_n$ converge ⇒ $\sum u_n$ converge.
- Si $0 \leqslant u_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \sum v_n$ converge.

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

- CNS de convergence : être bornée.
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- Si $0 \leqslant u_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \sum v_n$ converge.
- En particulier si $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$...La série $\sum v_n$ converge alors ssi $\alpha > 1$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

- $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

- $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge
- $\sum u_n$ converge absolument $\Rightarrow \sum u_n$ converge

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

- $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge
- $\sum u_n$ converge absolument $\Rightarrow \sum u_n$ converge
- La réciproque est fausse

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

- $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge
- $\sum u_n$ converge absolument $\Rightarrow \sum u_n$ converge
- La réciproque est fausse
- (Culture : $\forall\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ssi il y a convergence absolue)

Conclusion

Objectifs

⇒ Séries à termes positifs. Critère de Riemann

⇒ Convergence absolue

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 37 : Intégration
- Exercice : n°799, 802