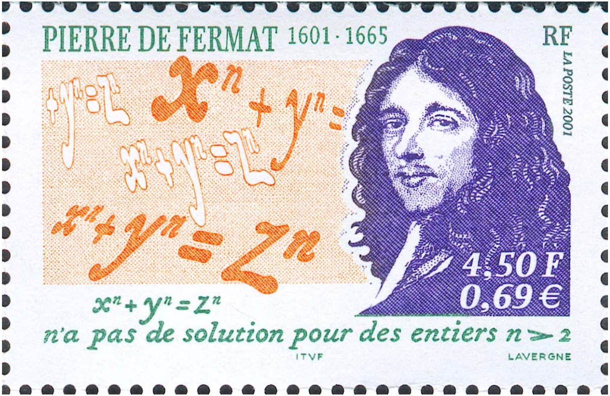

Leçon 99 - Intégrales

23 mai 2025

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒L'intégration comme outil pour « contrôler »

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒L'intégration comme outil pour « contrôler »

Une première implication

Théorème - Relation de Chasles

Soient $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$.
Si les restrictions de f à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont intégrables, alors f est intégrable sur $[a,b]$.
Dans ce cas :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

Une première implication

Théorème - Relation de Chasles

Soient $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$.
Si les restrictions de f à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont intégrables, alors f est intégrable sur $[a,b]$.
Dans ce cas :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

L'idée : faire des extractions de subdivisions et un forçage en c.

Démonstration

Une première implication

Théorème - Relation de Chasles

Soient $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$.
Si les restrictions de f à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont intégrables, alors f est intégrable sur $[a,b]$.
Dans ce cas :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

L'idée : faire des extractions de subdivisions et un forçage en c.

Démonstration

Remarque Retour sur la démonstration de la version faible du théorème fondamentale

Une réciproque ? Critère de Cauchy pour l'intégrale

Il y a bien une réciproque, si l'on se concentre sur les segments (intervalles compacts).

Analyse $f \in \mathscr{I}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathscr{I}([a',b'])$?

Une réciproque ? Critère de Cauchy pour l'intégrale

Il y a bien une réciproque, si l'on se concentre sur les segments (intervalles compacts).

Analyse $f \in \mathscr{I}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathscr{I}([a',b'])$?

Proposition - Critère de Cauchy-Suite

Soit (u_n) telle que $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \mid \forall\ p,q \geqslant N, |u_p - u_q| \leqslant \epsilon$.
Alors (u_n) est convergente (et réciproquement)

Une réciproque ? Critère de Cauchy pour l'intégrale

Il y a bien une réciproque, si l'on se concentre sur les segments (intervalles compacts).

Analyse $f \in \mathscr{I}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathscr{I}([a',b'])$?

Proposition - Critère de Cauchy-Suite

Soit (u_n) telle que $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \mid \forall\ p,q \geqslant N, |u_p - u_q| \leqslant \epsilon$.
Alors (u_n) est convergente (et réciproquement)

Remarque Démonstration

Une réciproque ? Critère de Cauchy pour l'intégrale

Il y a bien une réciproque, si l'on se concentre sur les segments (intervalles compacts).
Analyse $f \in \mathscr{I}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathscr{I}([a',b'])$?

Proposition - Critère de Cauchy-Suite

Soit (u_n) telle que $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \mid \forall\ p,q \geqslant N, |u_p - u_q| \leqslant \epsilon$.
Alors (u_n) est convergente (et réciproquement)

Remarque Démonstration

Proposition - Critère de Cauchy-Intégrale

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\ (\sigma_p)_1, (\sigma_p)_2, \delta\text{-fine}, |S(f,(\sigma_p)_1) - S(f,(\sigma_p)_2)| \leqslant \epsilon$.
Alors f est intégrable sur $[a,b]$.
La réciproque est vraie.

Une réciproque ? Critère de Cauchy pour l'intégrale

Il y a bien une réciproque, si l'on se concentre sur les segments (intervalles compacts).

Analyse $f \in \mathscr{I}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathscr{I}([a',b'])$?

Proposition - Critère de Cauchy-Suite

Soit (u_n) telle que $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \mid \forall\ p,q \geqslant N, |u_p - u_q| \leqslant \epsilon$.
Alors (u_n) est convergente (et réciproquement)

Remarque Démonstration

Proposition - Critère de Cauchy-Intégrale

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\ (\sigma_p)_1, (\sigma_p)_2, \delta$-fine, $|S(f,(\sigma_p)_1) - S(f,(\sigma_p)_2)| \leqslant \epsilon$.
Alors f est intégrable sur $[a,b]$.
La réciproque est vraie.

Démonstration

Encadrement

Application Théorème d'encadrement

Encadrement

Application Théorème d'encadrement
Appliquons ce résultat à la réciproque du théorème de Chasles

Proposition - Diminution du segment d'intégration

Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors pour tout $a',b' \in]a,b[$, $f_{|[a',b']}$ est intégrable sur $[a',b']$

Encadrement

Application Théorème d'encadrement
Appliquons ce résultat à la réciproque du théorème de Chasles

Proposition - Diminution du segment d'intégration

Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors pour tout $a',b' \in]a,b[$, $f_{|[a',b']}$ est intégrable sur $[a',b']$

Démonstration

Encadrement

Application Théorème d'encadrement
Appliquons ce résultat à la réciproque du théorème de Chasles

Proposition - Diminution du segment d'intégration

Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors pour tout $a',b' \in]a,b[$, $f_{|[a',b']}$ est intégrable sur $[a',b']$

Démonstration

Corollaire - Réciproque de Chasles

Si f est intégrable sur $[a,b]$ et $c \in]a,b[$.
Alors les restrictions de f sont intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ respectivement et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$

Encadrement

Application Théorème d'encadrement
Appliquons ce résultat à la réciproque du théorème de Chasles

Proposition - Diminution du segment d'intégration

Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors pour tout $a',b' \in]a,b[$, $f_{|[a',b']}$ est intégrable sur $[a',b']$

Démonstration

Corollaire - Réciproque de Chasles

Si f est intégrable sur $[a,b]$ et $c \in]a,b[$.
Alors les restrictions de f sont intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ respectivement et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$

Démonstration

Généralisation (notation)

Définition - Notations

Soient I un segment, f continue par morceaux sur I, $(a,b) \in I^2$. On pose :

$$\text{si } a<b,\quad \int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f$$

$$\text{si } a>b,\quad \int_a^b f(t)dt = -\int_{[b,a]} f$$

$$\text{si } a=b,\quad \int_a^b f(t)dt = 0.$$

Généralisation (notation)

Proposition - Relation de Chasles

Avec ces notations, la relation de Chasles s'écrit, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Généralisation (notation)

Proposition - Relation de Chasles

Avec ces notations, la relation de Chasles s'écrit, pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Lemme de Henstock et sous-subdivision

Heuristique. Sous-subdivisions

Soit $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n\big)$ de $[a,b]$. On est amené à évaluer

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\mathrm{d}t - (x_k - x_{k-1})f(t_k)$$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(t_k))\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles (et intégration d'une constante).

Lorsque cette différence est comprise entre $-\epsilon$ et $+\epsilon$, est-ce qu'on est assuré que chaque terme $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(t_k))\mathrm{d}t$ est également en valeur absolue plus petite que ϵ ? Et une somme quelconque de ces termes : $\displaystyle\sum_{k \in J \subset \mathbb{N}_n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(t_k))\mathrm{d}t$?

Sous-subdivision

Rappel

Définition - Sous-subdivision

Soit $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)$ une subdivision pointée d'un segment $[a,b]$.
On dit que s_p est une sous-subdivision de σ_p, s'il existe $I \subset \mathbb{N}_n$ tel que $s_p = \big(([x_{k-1},x_k],t_k),k \in I\big)$.
L'ensemble I est appelé ensemble d'appui de la sous-subdivision s_p à partir de σ_p.
On appelle domaine de s_p, l'ensemble $\mathscr{D}(s_p) = \bigcup_{k\in I}[x_{k-1},x_k]$.

Sous-subdivision

Rappel

Définition - Sous-subdivision

Soit $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{n-1},x_n],t_n\big)$ une subdivision pointée d'un segment $[a,b]$.
On dit que s_p est une sous-subdivision de σ_p, s'il existe $I \subset \mathbb{N}_n$ tel que $s_p = \big(([x_{k-1},x_k],t_k), k \in I\big)$.
L'ensemble I est appelé ensemble d'appui de la sous-subdivision s_p à partir de σ_p.
On appelle domaine de s_p, l'ensemble $\mathscr{D}(s_p) = \bigcup_{k\in I}[x_{k-1},x_k]$.

Exemple Cas simple

Lemme de Henstock

Théorème - Lemme de Henstock

Soient $f \in \mathscr{I}([a,b])$ et $\epsilon > 0$.
Soit δ, une jauge tel que $\forall\ \sigma_p$, δ-fine, $|S(f,\sigma_p) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leqslant \epsilon$.
Alors pour toute sous-subdivision s_p d'une subdivision σ_p, δ-fine et d'appui I

$$\left| S(f,s_p) - \int_{\mathscr{D}(s_p)} f(t)\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{k\in I} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t_k) - f(t))\mathrm{d}t \right| \leqslant \epsilon$$

Lemme de Henstock

Théorème - Lemme de Henstock

Soient $f \in \mathscr{I}([a,b])$ et $\epsilon > 0$.
Soit δ, une jauge tel que $\forall\ \sigma_p$, δ-fine, $|S(f,\sigma_p) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leqslant \epsilon$.
Alors pour toute sous-subdivision s_p d'une subdivision σ_p, δ-fine et d'appui I

$$\left|S(f,s_p) - \int_{\mathscr{D}(s_p)} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k\in I}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t_k) - f(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon$$

Remarque Une jauge adaptée à f, <u>sur toute la longueur</u>

Lemme de Henstock

Théorème - Lemme de Henstock

Soient $f \in \mathscr{I}([a,b])$ et $\epsilon > 0$.
Soit δ, une jauge tel que $\forall\ \sigma_p$, δ-fine, $|S(f,\sigma_p) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leqslant \epsilon$.
Alors pour toute sous-subdivision s_p d'une subdivision σ_p, δ-fine et d'appui I

$$\left| S(f,s_p) - \int_{\mathscr{D}(s_p)} f(t)\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{k\in I} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t_k) - f(t))\mathrm{d}t \right| \leqslant \epsilon$$

Remarque Une jauge adaptée à f, <u>sur toute la longueur</u>

Démonstration

Applications

Application Majoration de la somme des valeurs absolues

Applications

Application Majoration de la somme des valeurs absolues

<u>Exercice</u>

Soit $f \in \mathscr{I}([a,b])$. Soit $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que F est continue en tout $c \in [a,b]$.

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒L'intégration comme outil pour « contrôler »

Théorème(s) de la moyenne

Remarque Le théorème de la mouche.

Théorème(s) de la moyenne

Remarque Le théorème de la mouche.

Proposition - Inégalité de la moyenne

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|.$$

Théorème(s) de la moyenne

Remarque Le théorème de la mouche.

Proposition - Inégalité de la moyenne

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|.$$

Démonstration

Valeur moyenne

Définition - Valeur moyenne de f

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.
Alors $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Valeur moyenne

Définition - Valeur moyenne de f

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.
Alors $\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Exercice

Montrer que si f est continue sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$.

Valeur moyenne

Définition - Valeur moyenne de f

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.
Alors $\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Exercice

Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$.

Exercice

Montrer les théorèmes suivants :

1. Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continue et $g:[a,b] \to \mathbb{R}_+$, positive et intégrable.
   Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que
   $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
2. Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, postive, de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante et $g:[a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue.
   Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que
   $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x$.

Positivité et continuité

Proposition - Intégrale d'une fonction positive et continue

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **continue, positive**.

Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt>0$.

Positivité et continuité

Proposition - Intégrale d'une fonction positive et continue

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **continue, positive.**

Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt>0$.

Démonstration

Positivité et continuité

Proposition - Intégrale d'une fonction positive et continue

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue, positive.**

Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.

Démonstration

Exercice

Autre démonstration. On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$, croissante. Conclure par contraposition.

Positivité et continuité

Le théorème suivant nous sert souvent (en particulier pour montrer que certaines formes bilinéaires sont définies) :

Positivité et continuité

Corollaire - Intégrale nulle d'une fonction continue, de signe constant

Soit f **continue, de signe constant** sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$.
Alors f est nulle sur $[a,b]$.

Positivité et continuité

Corollaire - Intégrale nulle d'une fonction continue, de signe constant

Soit f **continue, de signe constant** sur $[a,b]$ telle que
$$\int_a^b f(t)dt = 0.$$
Alors f est nulle sur $[a,b]$.

Démonstration

Positivité et continuité

Corollaire - Intégrale nulle d'une fonction continue, de signe constant

Soit f **continue, de signe constant** sur $[a,b]$ telle que
$$\int_a^b f(t)dt = 0.$$
Alors f est nulle sur $[a,b]$.

Démonstration

Attention. Toutes les hypothèses sont importantes

S'il manque l'une des deux hypothèses, le résultat est faux.

- Donner un contre-exemple pour une fonction continue, non nulle, d'intégrale nulle :
- Donner un contre-exemple pour une fonction continue par morceaux mais non continue, positive, non nulle, d'intégrale nulle.

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒L'intégration comme outil pour « contrôler »

Fonctions à valeurs complexes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ où $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Continuité par morceaux

On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f_{|]a_{i-1},a_i[}$ soit continue, f admette des limites dans $\mathbb{C}$ à droite en a_{i-1}, à gauche en a_i.
Cela revient à dire que $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont continues par morceaux.

Fonctions à valeurs complexes - Définition

On se contente ici de l'intégrabilité pour des fonctions continues par morceaux. On aurait pu (du ?) étudier l'intégrabilité des fonctions directement en étudiant celles de sa partie imaginaire et celle de sa partie réelle.

Fonctions à valeurs complexes - Définition

On se contente ici de l'intégrabilité pour des fonctions continues par morceaux. On aurait pu (du ?) étudier l'intégrabilité des fonctions directement en étudiant celles de sa partie imaginaire et celle de sa partie réelle.

Définition - Intégrale complexe

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le complexe

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re} f + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im} f$$

et on utilise les mêmes conventions pour $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Fonctions à valeurs complexes - Propriétés

Théorème - Propriétés

On a les propriétés suivantes

- $f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b],\mathbb{C})$ $(K=\mathbb{C})$
- Chasles : $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,\mathbb{C})$, pour tout $(a,b,c) \in I^3$,
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$
- $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a,b],\mathbb{C}) \Rightarrow |f| \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$ et
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$
- sommes de Riemann : si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Fonctions à valeurs complexes - Propriétés

Théorème - Propriétés

On a les propriétés suivantes

- $f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b],\mathbb{C})$ $(K=\mathbb{C})$
- Chasles : $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,\mathbb{C})$, pour tout $(a,b,c)\in I^3$,
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$
- $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a,b],\mathbb{C}) \Rightarrow |f| \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$ et
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$
- sommes de Riemann : si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est continue alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒L'intégration comme outil pour « contrôler »

Reste intégral

Remarque Rappels de notation

Reste intégral

Remarque Rappels de notation

Théorème - Formule de Taylor avec reste intégral

Soient f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe C^{n+1}, $a, b \in I$. Alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Ou de même $R_n(b) = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$

Reste intégral

Remarque Rappels de notation

Théorème - Formule de Taylor avec reste intégral

Soient f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe C^{n+1}, $a, b \in I$. Alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Ou de même $R_n(b) = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$

Démonstration

Taylor-Lagrange

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe C^{n+1}, $a, b \in I$. Alors

$$\left|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Ou de même $|R_n(b)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.
Si $b < a$ il faut remplacer $[a,b]$ par $[b,a]$.

Taylor-Lagrange

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe C^{n+1}, $a, b \in I$. Alors

$$|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Ou de même $|R_n(b)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.
Si $b < a$ il faut remplacer $[a,b]$ par $[b,a]$.

Démonstration

Taylor-Young

La formule suivante découle des précédente (et avait déjà été rencontrée)

Taylor-Young

La formule suivante découle des précédente (et avait déjà été rencontrée)

Théorème - Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), n fois dérivable en $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$

Ou de même $R_n(x) = o((x-a)^n)$.

Exploiter ces formules

Savoir-faire. Utilisation des différentes formules

- L'inégalité de Taylor-Lagrange donne un résultat global (sur tout l'intervalle I) et permet de majorer $|R_n|$.
- La formule de Taylor avec reste intégral donne également un résultat global, c'est de plus une expression exacte que l'on utilise lorsque la majoration du reste n'est pas suffisante, par exemple si on veut en étudier le signe.
- La formule de Taylor-Young donne uniquement un résultat local, elle sert donc à préciser la fonction f au voisinage de a.

Démonstration

Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tels que f soit $n-1$ fois dérivable sur I et admette une dérivée n-ième en a. On veut montrer qu'il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que

$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$

1. On suppose f réelle.
   On considère ϵ définie par : $\epsilon(a) = 0$ et pour $x \neq a$,
   $$\epsilon(x) = \frac{n!}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)$$
   On fixe un réel $x \neq a$ et $A(x) = f^{(n)}(a) + \epsilon(x)$.
   Et enfin on considère la fonction ϕ définie sur I par
   $$\phi(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(t-a)^n}{n!} A(x).$$
   Calculer $\phi^{(k)}(a)$, pour tout $k \leqslant n-2$.
2. Montrer que $\forall\ i \leqslant n-1, \exists\ x_i \in]a, x[$ tq$\phi^{(i)}(x_i) = 0$.
3. En déduire la limite de $A(x)$ pour $x \to a$, puis celle de $\epsilon(x)$.
4. Faire le cas d'une fonction complexe.

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒ L'intégration comme outil pour « contrôler »

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Critère de Cauchy-intégrale

- Critère d'intégrabilité sans connaître la valeur de l'intégrale ?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Critère de Cauchy-intégrale

- Critère d'intégrabilité sans connaître la valeur de l'intégrale ?
- Même principe que pour les suites de Cauchy !

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒ L'intégration comme outil pour « contrôler »

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

- Si $f \in \mathscr{I}([a,b])$, alors pour tout $a', b' \in [a,b]$, $f \in \mathscr{I}([a',b'])$

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

- Si $f \in \mathscr{I}([a,b])$, alors pour tout $a', b' \in [a,b]$, $f \in \mathscr{I}([a',b'])$
- Puis, pour tout $c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

- Si $f \in \mathscr{I}([a,b])$, alors pour tout $a', b' \in [a,b]$, $f \in \mathscr{I}([a',b'])$
- Puis, pour tout $c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$
- Intégrabilité : avec le critère de Cauchy-Intégrale (sans connaitre la valeur de la limite)

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

- Si $f \in \mathscr{I}([a,b])$, alors pour tout $a',b' \in [a,b]$, $f \in \mathscr{I}([a',b'])$
- Puis, pour tout $c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$
- Intégrabilité : avec le critère de Cauchy-Intégrale (sans connaitre la valeur de la limite)
- Mieux : lemme d'Henstock dit que la jauge adapté à l'intégrale est parfaite sur tout l'intervalle $[a,b]$ (pas de compensation de signe)

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒ L'intégration comme outil pour « contrôler »

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒ L'intégration comme outil pour « contrôler »

- L'inégalité de la moyenne (Egalité des accroissements finis) et généralisation

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒ L'intégration comme outil pour « contrôler »

- L'inégalité de la moyenne (Egalité des accroissements finis) et généralisation
- Si $f \geqslant 0$, continue et $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$ (et contraposée)

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒ L'intégration comme outil pour « contrôler »

- L'inégalité de la moyenne (Egalité des accroissements finis) et généralisation
- Si $f \geqslant 0$, continue et $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$ (et contraposée)
- Extension aux fonctions complexes

Conclusion

Objectifs

⇒ Critère de Cauchy-intégrale

⇒ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

⇒ L'intégration comme outil pour « contrôler »

- L'inégalité de la moyenne (Egalité des accroissements finis) et généralisation
- Si $f \geqslant 0$, continue et $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$ (et contraposée)
- Extension aux fonctions complexes
- Formule de Taylor (avec reste intégral)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Critère de Cauchy-intégrale

$\Rightarrow$ Relation de Chasles et Lemme d'Henstock

$\Rightarrow$ L'intégration comme outil pour « contrôler »

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 27 : Espaces euclidiens
- Exercice : n°787 & 788