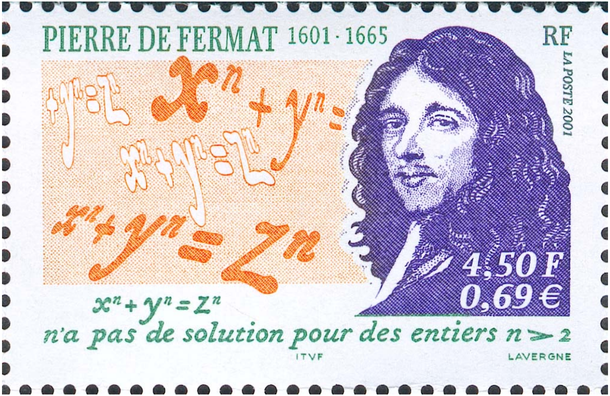

Leçon 97 - Intégrales

21 mai 2025

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

⇒ Famille de fonctions et relations
⇒ Somme de Riemann-Cauchy
1. Problèmes
2. « Construire »l'intégrale. Préalable
3. Construction de l'intégrale
3.1. Classes de fonctions à intégrer
3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D
3.3. Intégrales d'une fonction

Principe

Heuristique - Principe

L'intégrale est facile à mettre en place pour une famille de fonctions simples : les fonctions en escalier (cf partie suivante). Donc ici :

1. On se concentre sur l'ensemble des fonctions en escalier, c'est une algèbre.
2. On voit comment on peut *par densité* généraliser les propriétés obtenues en passant sur un ensemble *adhérant* : l'ensemble des fonctions continues par morceaux.
3. On définit donc, en amont, cet ensemble.

Fonctions en escalier

Définition - Fonction en escalier

$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que :

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad \phi_{|]a_{i-1}, a_i[}$ est constante.

Une telle subdivision est dite **subordonnée** (ou **adaptée**) à ϕ.

On a $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1}, x_i[} + \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i) \mathbf{1}_{\{x_i\}}$.

Fonctions en escalier

Définition - Fonction en escalier

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que :

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\quad \phi_{|]a_{i-1},a_i[}$ est constante.

Une telle subdivision est dite **subordonnée** (ou **adaptée**) à ϕ.

On a $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1},x_i[} + \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i)\mathbf{1}_{\{x_i\}}$.

Proposition - Sur les subdivisions

- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision subordonnée à ϕ est encore subordonnée à ϕ.
- Une fonction constante sur $[a,b]$ est une fonction en escalier.
- Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc est bornée.

Fonctions en escalier

Définition - Fonction en escalier

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que :

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\quad \phi_{|]a_{i-1},a_i[}$ est constante.

Une telle subdivision est dite **subordonnée** (ou **adaptée**) à ϕ.

On a $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1},x_i[} + \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i)\mathbf{1}_{\{x_i\}}$.

Proposition - Sur les subdivisions

• Toute subdivision plus fine qu'une subdivision subordonnée à ϕ est encore subordonnée à ϕ.

• Une fonction constante sur $[a,b]$ est une fonction en escalier.

• Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc est bornée.

Démonstration

Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

Exemple Fonction en escalier. Définition algébrique

Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

Exemple Fonction en escalier. Définition algébrique Exercice
Que vaut $\mathbf{1}_{[a,b]} + \mathbf{1}_{[c,d]}$?

Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

Exemple Fonction en escalier. Définition algébrique Exercice
Que vaut $\mathbf{1}_{[a,b]} + \mathbf{1}_{[c,d]}$?

Théorème - Algèbre

On note $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs réelles (ou plus simplement $\mathscr{E}([a,b])$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble d'arrivée).
$\big(\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\cdot\big)$ est un sev de $\big(\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R}),+,\cdot\big)$.
$\big(\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\times\big)$ est un sous-anneau de $\big(\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R}),+,\times\big)$.
Donc $\big(\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\times,\cdot\big)$ est une algèbre.

Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

Exemple Fonction en escalier. Définition algébrique Exercice
Que vaut $\mathbf{1}_{[a,b]}+\mathbf{1}_{[c,d]}$?

Théorème - Algèbre

On note $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs réelles (ou plus simplement $\mathscr{E}([a,b])$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble d'arrivée).
$\left(\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ est un sev de $\left(\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R}),+,\cdot\right)$.
$\left(\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un sous-anneau de $\left(\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R}),+,\times\right)$.
Donc $\left(\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),+,\times,\cdot\right)$ est une algèbre.

Démonstration

Fonctions continues par morceaux

Elles sont d'abord définies sur un segment, puis plus largement sur un intervalle qui peut être ouvert.

Fonctions continues par morceaux

Définition - Continuité par morceaux sur un segment

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que

- f est continue sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$
- pour $i \in [\![1,n]\!]$, f admet une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite finie à gauche en x_i.

La subdivision est dite subordonnée ou adaptée à f.

Fonctions continues par morceaux

Définition - Continuité par morceaux sur un segment

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que

- f est continue sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$
- pour $i \in [\![1,n]\!]$, f admet une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite finie à gauche en x_i.

La subdivision est dite subordonnée ou adaptée à f.

Exemple Question :

Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux ?

- une fonction en escalier ?
- une fonction continue ?
- $f : \begin{array}{ll} x & \mapsto e^{1/x} \text{ si } x \in [-1,1], x \neq 0 \\ 0 & \mapsto 0 \end{array}$?

Propriété (nécessaire)

Proposition - Bornée

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Propriété (nécessaire)

Proposition - Bornée

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration

Stabilité

Proposition - Algèbre

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles, que l'on pourra noter $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a,b],\mathbb{R})$, est un s.e.v, et même une sous-algèbre de $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, algèbre des fonctions bornées, lui-même sous algèbre de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.

Stabilité

Proposition - Algèbre

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles, que l'on pourra noter $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a,b],\mathbb{R})$, est un s.e.v, et même une sous-algèbre de $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, algèbre des fonctions bornées, lui-même sous algèbre de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$$

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que
$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que
$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que
$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que
$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$

Démonstration 1 - Heine

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que
$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que
$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$$

Démonstration 1 - Heine

Démonstration 2 - Cousin (la continuité donne la jauge)

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leqslant \epsilon$$

Démonstration 1 - Heine
Démonstration 2 - Cousin (la continuité donne la jauge)
Démonstration 3 - Cas continue par morceaux

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.
Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,b]} |f-\phi_n| = 0.$$

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.
Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,b]} |f-\phi_n| = 0.$$

Remarque Convergence « uniforme »

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.
Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{[a,b]}|f-\phi_n| = 0.$$

Remarque Convergence « uniforme »

Démonstration

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.
Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,b]} |f-\phi_n| = 0.$$

Remarque Convergence « uniforme »

Démonstration

Corollaire - Encadrement

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, ϕ et ψ, telles que

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \phi \leqslant \epsilon.$$

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.
Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ tq :
$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{[a,b]}|f-\phi_n|=0.$$

Remarque Convergence « uniforme »

Démonstration

Corollaire - Encadrement

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\epsilon>0$.
Alors il existe deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, ϕ et ψ, telles que
$$\phi\leqslant f\leqslant\psi \text{ et } \psi-\phi\leqslant\epsilon.$$

Démonstration

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition - Continuité par morceaux sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur l'intervalle I, si pour tout segment $[a,b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition - Continuité par morceaux sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur l'intervalle I, si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.

Exemple La fonction $f : x \mapsto e^{1/x}$ sur $]0, 1]$.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition - Continuité par morceaux sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur l'intervalle I, si pour tout segment $[a,b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.

Exemple La fonction $f : x \mapsto e^{1/x}$ sur $]0,1]$.

Heuristique - Situation courante dans l'étude de fonctions numériques

L'année prochaine à de nombreuses reprises, il faudra faire cette différence :

- L'étude sur l'intervalle I n'est pas possible,
- Mais celle sur tout segment inclus dans I est possible.

Incroyable mais vrai : les propriétés passeront alors en tout x de I (puisque tout x de I est dans un segment $[a,b] \subset I$).

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

Somme de Cauchy d’une fonction en escalier

On commence par une construction simple : l’intégrale de fonctions en escalier.

Analyse Intégrale d’une fonction en escalier.

Somme de Cauchy d'une fonction en escalier

On commence par une construction simple : l'intégrale de fonctions en escalier.

Analyse Intégrale d'une fonction en escalier.

Exercice

Montrer que si σ et σ' sont deux subdivisions subordonnées à ϕ, alors $I(\phi,\sigma) = I(\phi,\sigma')$.

Somme de Cauchy de f selon une subdivision pointée

Définition - Somme de Cauchy de f selon σ_p

Soit f une fonction numérique défini sur le segment $[a,b]$.
Soit $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2)\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ une subdivision pointée de $[a,b]$.
On appelle **somme de Cauchy de f associée à** σ_p la quantité

$$S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \times f(t_k)$$

Somme de Cauchy de f selon une subdivision pointée

Définition - Somme de Cauchy de f selon σ_p

Soit f une fonction numérique défini sur le segment $[a,b]$.
Soit $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2)\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ une subdivision pointée de $[a,b]$.
On appelle **somme de Cauchy de f associée à σ_p** la quantité

$$S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \times f(t_k)$$

Remarque Une somme de Cauchy est une intégrale

Pas constant

Remarque Cas fréquents

Pas constant

Remarque Cas fréquents

Définition - Somme de Riemann (Cauchy à pas constant)

A toute fonction $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, on associe les sommes dites de Riemann

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{ou}$$

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i)\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Pas constant

Remarque Cas fréquents

Définition - Somme de Riemann (Cauchy à pas constant)

A toute fonction $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, on associe les sommes dites de Riemann

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad \text{ou}$$

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i)\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Remarque Appellation uniforme

Exemple Calcul de $R_n(f)$ et $S_n(f)$ avec $f : x \longmapsto x$ sur $[0,1]$.

Propriétés des sommes de Cauchy

Théorème - Propriétés des sommes de Cauchy

Soit $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_0), \ldots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\big)$ une subdivision pointée de $[a, b]$.

- $f \mapsto S(f, \sigma_p)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$.
- Si f est positive sur $[a, b]$ alors $S(f, \sigma_p) \geqslant 0$.
  Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors $S(f, \sigma_p) \geqslant S(g, \sigma_p)$.
- Si $f \in \mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$, alors on a pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$,
  en notant $\sigma_p^k = \big(([x_0, x_1], t_0), \ldots ([x_{k-1}, x_k], t_k)\big)$
  et ${}^k\sigma_p = \big(([x_k, x_{k+1}], t_k), \ldots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\big)$

$$S(f, \sigma_p) = S(f, \sigma_p^k) + S(f, {}^k\sigma_p) \qquad \text{relation de Chasles}$$

Propriétés des sommes de Cauchy

Théorème - Propriétés des sommes de Cauchy

Soit $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_0),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ une subdivision pointée de $[a,b]$.

- $f \mapsto S(f,\sigma_p)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.
- Si f est positive sur $[a,b]$ alors $S(f,\sigma_p) \geqslant 0$.
  Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$ alors $S(f,\sigma_p) \geqslant S(g,\sigma_p)$.
- Si $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, alors on a pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$,
  en notant $\sigma_p^k = \big(([x_0,x_1],t_0),\dots([x_{k-1},x_k],t_k)\big)$
  et ${}^k\sigma_p = \big(([x_k,x_{k+1}],t_k),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$

$$S(f,\sigma_p) = S(f,\sigma_p^k) + S(f,{}^k\sigma_p) \qquad \text{relation de Chasles}$$

Démonstration

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

Intégrale de Riemann : pas constant

Définition - Intégrale de f, au sens de Riemann

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$.
La fonction f est dite **intégrable sur** $[a,b]$ **au sens de Riemann** ou **R-intégrable sur** $[a,b]$ s'il existe un nombre réel S tel que

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta^* > 0 \text{ telle que } \forall\ \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

On notera $\mathscr{I}_R([a,b])$ **l'ensemble des fonctions intégrables sur** $[a,b]$ **au sens de Riemann**.
Le nombre S ci-dessus est appelé l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ et est noté

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \text{ ou } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ voire } \int_{[a,b]} f \text{ ou } \int_a^b f$$

Intégrale de Riemann : pas constant

Définition - Intégrale de f, au sens de Riemann

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$.
La fonction f est dite **intégrable sur** $[a,b]$ **au sens de Riemann** ou **R-intégrable sur** $[a,b]$ s'il existe un nombre réel S tel que

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta^* > 0 \text{ telle que } \forall\ \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

On notera $\mathscr{I}_R([a,b])$ **l'ensemble des fonctions intégrables sur** $[a,b]$ **au sens de Riemann**.
Le nombre S ci-dessus est appelé l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ et est noté

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \text{ ou } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ voire } \int_{[a,b]} f \text{ ou } \int_a^b f$$

On admet à ce stade que S est unique, nous le démontrerons pour l'intégrale de Kurzweil-Henstock.

Limite

Remarque Ecriture en fonction de n

Limite

Remarque Ecriture en fonction de n

Heuristique. C'est bien une limite

On note (u_n) converge :

$$\begin{array}{llr} \exists\ \ell \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall\ \epsilon > 0, & \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant N, & |u_n - \ell| \leqslant \epsilon \\ \exists\ S \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall\ \epsilon > 0, & \exists\ \delta^* > 0 \text{ tq } \forall\ \sigma_p, \delta^*\text{-fine}, & |S(f,\sigma_p) - S| \leqslant \epsilon \end{array}$$

Souvenons nous que nous avions également écrit cela en terme de réunion ($\exists$), d'inclusion ($\forall$), de réunion d'inclusions d'ensemble.
On notera (pas souvent)

$$\lim_{\delta^*(\sigma_p)\to 0} S(f,\sigma_p) = S$$

Limite

Remarque Ecriture en fonction de n

Heuristique. C'est bien une limite

On note (u_n) converge :

$$\exists\ \ell \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall\ \epsilon > 0, \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$$
$$\exists\ S \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall\ \epsilon > 0, \quad \exists\ \delta^* > 0 \text{ tq } \forall\ \sigma_p, \delta^*\text{-fine}, \quad |S(f,\sigma_p) - S| \leqslant \epsilon$$

Souvenons nous que nous avions également écrit cela en terme de réunion ($\exists$), d'inclusion ($\forall$), de réunion d'inclusions d'ensemble.
On notera (pas souvent)

$$\lim_{\delta^*(\sigma_p)\to 0} S(f,\sigma_p) = S$$

Remarque Le sens du dx

Fonctions bornées

On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

Fonctions bornées

On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

Proposition- $\mathscr{I}_R([a,b]) \subset \mathscr{B}([a,b])$

Si f est intégrable sur $[a,b]$ au sens de Riemann, alors f est bornée

Fonctions bornées

On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

Proposition- $\mathscr{I}_R([a,b]) \subset \mathscr{B}([a,b])$

Si f est intégrable sur $[a,b]$ au sens de Riemann, alors f est bornée

Démonstration

Fonctions bornées

On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

Proposition- $\mathscr{I}_R([a,b]) \subset \mathscr{B}([a,b])$

Si f est intégrable sur $[a,b]$ au sens de Riemann, alors f est bornée

Démonstration

Exemple $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(0) = 0$.

Subdivision δ^*-fine

Proposition - Contrôle sur la subdivision pointée δ^*-fine

Soit $\delta^* > 0$. Si σ_p est une subdivision pointée δ^*-fine,
alors $\forall\ k \in \mathbb{N}_n,\ 0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta^*$.
Réciproquement, si σ_p est une subdivision pointée vérifiant
$\forall\ k \in \mathbb{N}_n,\ 0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta^*$, alors σ_p est $2\delta^*$-fine.

Subdivision δ^*-fine

Proposition - Contrôle sur la subdivision pointée δ^*-fine

Soit $\delta^* > 0$. Si σ_p est une subdivision pointée δ^*-fine,
alors $\forall\ k \in \mathbb{N}_n,\ 0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta^*$.
Réciproquement, si σ_p est une subdivision pointée vérifiant $\forall\ k \in \mathbb{N}_n,\ 0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta^*$, alors σ_p est $2\delta^*$-fine.

Remarque Liens entre intégrale.

Subdivision δ^*-fine

Proposition - Contrôle sur la subdivision pointée δ^*-fine

Soit $\delta^* > 0$. Si σ_p est une subdivision pointée δ^*-fine, alors $\forall\ k \in \mathbb{N}_n,\ 0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta^*$.

Réciproquement, si σ_p est une subdivision pointée vérifiant $\forall\ k \in \mathbb{N}_n,\ 0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta^*$, alors σ_p est $2\delta^*$-fine.

Remarque Liens entre intégrale.

Démonstration

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Familles de fonctions et relations

- Algèbre des fonctions en escalier

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

- Algèbre des fonctions en escalier
- Algèbre des fonctions continues par morceaux sur un segment

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

- Algèbre des fonctions en escalier
- Algèbre des fonctions continues par morceaux sur un segment
- Densité des fonctions en escalier dans les fonctions continues par morceaux :
$$\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b]) \subset \overline{\mathscr{E}([a,b])}$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Familles de fonctions et relations

- Algèbre des fonctions en escalier
- Algèbre des fonctions continues par morceaux sur un segment
- Densité des fonctions en escalier dans les fonctions continues par morceaux :
$$\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b]) \subset \overline{\mathscr{E}([a,b])}$$
- (Fonction continue par morceaux sur un intervalle.)

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- Somme de Cauchy/Riemann : $S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- Somme de Cauchy/Riemann : $S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(t_k)$.
- Cas classique : pas constant (somme de Riemann).

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- Somme de Cauchy/Riemann : $S(f,\sigma_p) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(t_k)$.
- Cas classique : pas constant (somme de Riemann).
- Propriétés classiques (somme de Riemann) : linéarité, positivité, relation de Chasles

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- Somme de Cauchy/Riemann : $S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$.
- Cas classique : pas constant (somme de Riemann).
- Propriétés classiques (somme de Riemann) : linéarité, positivité, relation de Chasles

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration
  3. Construction de l'intégrale (fin)
- Exercice : n°781 & 790

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- Somme de Cauchy/Riemann : $S(f,\sigma_p)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(t_k)$.
- Cas classique : pas constant (somme de Riemann).
- Propriétés classiques (somme de Riemann) : linéarité, positivité, relation de Chasles

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration
  3. Construction de l'intégrale (fin)
- Exercice : n°781 & 790