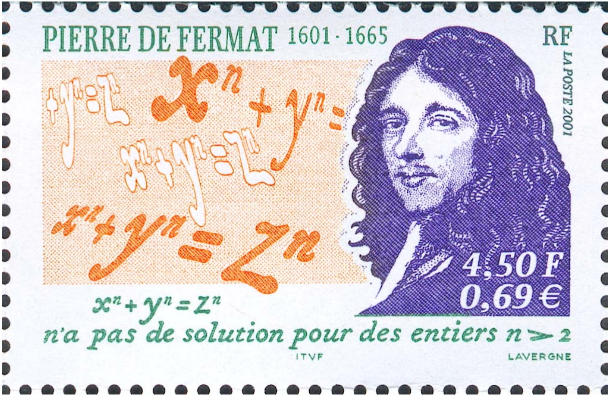


Leçon 99 - Intégrales

27 mai 2025

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

Remarque. Deux temps

- Si la jauge peut être choisie constante, alors la fonction est R-intégrable, sinon elle est KH-intégrable (ou rien). Nous le verrons sur différents exemples.

Remarque. Deux temps

- Si la jauge peut être choisie constante, alors la fonction est R-intégrable, sinon elle est KH-intégrable (ou rien). Nous le verrons sur différents exemples.
- Avant de faire la liste des fonctions intégrables au sens de Riemann ou au sens de Kurzweil-Henstock, nous avons besoin d'un théorème de stabilité.

Fonctions en escalier

Remarque Fonctions intégrables au sens de Riemann

Fonctions en escalier

Remarque Fonctions intégrables au sens de Riemann

Analyse Fonctions en escalier

Fonctions en escalier

Remarque Fonctions intégrables au sens de Riemann
Analyse Fonctions en escalier

Proposition - Intégration des fonctions en escalier

Les fonctions en escalier sur un segment sont donc R-intégrables et donc KH-intégrables. Et plus précisément si $f \in \mathscr{E}[a,b]$,
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i$ où $\sigma = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ est subordonnée à f i.e. $\forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ f_{|]a_i,a_{i-1}[} = \lambda_i$.

Stabilité uniforme

Théorème- Encadrement

Une fonction f est KH-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions $f_{-\epsilon}$ et $f_{+\epsilon}$ KH-intégrables telles que

$$f_{-\epsilon} \leqslant f \leqslant f_{+\epsilon} \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b f_{+\epsilon} - \int_a^b f_{-\epsilon} \right| \leqslant \epsilon$$

Stabilité uniforme

Théorème- Encadrement

Une fonction f est KH-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions $f_{-\epsilon}$ et $f_{+\epsilon}$ KH-intégrables telles que

$$f_{-\epsilon} \leqslant f \leqslant f_{+\epsilon} \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b f_{+\epsilon} - \int_a^b f_{-\epsilon} \right| \leqslant \epsilon$$

On a le même résultat de fermeture d'espace des fonctions R-intégrables par convergence uniforme :

Proposition - Encadrement

Une fonction f est R-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions $f_{-\epsilon}$ et $f_{+\epsilon}$ R-intégrables telles que

$$f_{-\epsilon} \leqslant f \leqslant f_{+\epsilon} \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b f_{+\epsilon} - \int_a^b f_{-\epsilon} \right| \leqslant \epsilon$$

Démonstrations. Cas des fonctions en escalier

Il s’agit de la même structure de démonstration, mais la jauge est restreinte à l’ensemble des jauges constantes dans le second cas.

Démonstrations. Cas des fonctions en escalier

Il s'agit de la même structure de démonstration, mais la jauge est restreinte à l'ensemble des jauges constantes dans le second cas.

Démonstration

Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur $[a, b]$ sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur $[a,b]$ sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

Proposition - $\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b]) \subset \mathscr{I}([a,b])$

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est R-intégrable donc KH-intégrable sur $[a,b]$.

Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur $[a,b]$ sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

Proposition - $\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b]) \subset \mathscr{I}([a,b])$

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est R-intégrable donc KH-intégrable sur $[a,b]$.

Corollaire - Fonction continue

Soit f continue sur $[a,b]$, alors f est R-intégrable et KH-intégrable sur $[a,b]$

Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur $[a,b]$ sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

Proposition - $\mathscr{CM}([a,b]) \subset \mathscr{I}([a,b])$

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est R-intégrable donc KH-intégrable sur $[a,b]$.

Corollaire - Fonction continue

Soit f continue sur $[a,b]$, alors f est R-intégrable et KH-intégrable sur $[a,b]$

Démonstration

Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur $[a,b]$ sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

Proposition - $\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b]) \subset \mathscr{I}([a,b])$

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est R-intégrable donc KH-intégrable sur $[a,b]$.

Corollaire - Fonction continue

Soit f continue sur $[a,b]$, alors f est R-intégrable et KH-intégrable sur $[a,b]$

Démonstration

Remarque Changement de valeurs en quelques points

Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur $[a,b]$ sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

Proposition - $\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b]) \subset \mathscr{I}([a,b])$

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est R-intégrable donc KH-intégrable sur $[a,b]$.

Corollaire - Fonction continue

Soit f continue sur $[a,b]$, alors f est R-intégrable et KH-intégrable sur $[a,b]$

Démonstration

Remarque Changement de valeurs en quelques points

Remarque Calcul d'aire

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

Théorème fondamental

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.
Cela change avec la partie qui suit.

Théorème fondamental

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.
Cela change avec la partie qui suit.

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version forte)

Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et admettant une dérivée à droite en a et à gauche en b. Notons f la dérivée de F. Alors f est KH-intégrable $(f \in \mathscr{I}([a,b]))$ et :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Théorème fondamental

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.
Cela change avec la partie qui suit.

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version forte)

Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et admettant une dérivée à droite en a et à gauche en b. Notons f la dérivée de F. Alors f est KH-intégrable ($f \in \mathscr{I}([a,b])$) et :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Remarque Jauge adaptée, inégalité des accroissements finis et réciproque.

Théorème fondamental

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.
Cela change avec la partie qui suit.

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version forte)

Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et admettant une dérivée à droite en a et à gauche en b.
Notons f la dérivée de F. Alors f est KH-intégrable ($f \in \mathscr{I}([a,b])$) et :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Remarque Jauge adaptée, inégalité des accroissements finis et réciproque.
Démonstration

Une jauge adaptée à f

Remarque Retour sur le choix de la jauge.

Une jauge adaptée à f

Remarque Retour sur le choix de la jauge.

Savoir-faire. Trouver la jauge pour une fonction f admettant une primitive F

Si f admet une primitive F, i.e. $F' = f$, alors on a une jauge naturelle : celle de la la dérivation de F.

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*, \forall\ x,y \in [a,b],\ |y-x| \leqslant \delta(x) \\ \Rightarrow \left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f'(x)\right| \leqslant \epsilon$$

Alors si σ_p est δ-fine :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (F(b)-F(a)) = \\ \sum_{k=1}^r [(x_{k+1}-x_k)f(t_k) - (F(x_{k+1})-F(t_k)) - (F(t_k)-F(x_k))] \\ \leqslant \epsilon(b-a)$$

en respectant la croissance : $x_k < t_k < x_{k+1}$

Primitives

Remarque Rappels. Revoir le chapitre 6.

Primitives

Remarque Rappels. Revoir le chapitre 6.

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version faible)

Soit f continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in I$. Alors la fonction

$$\begin{array}{rrl} F: & I & \to \mathbb{K} \\ & x & \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est de classe C^1 sur I et $F' = f$.
C'est de plus l'unique primitive de f nulle en $a \in I$.

Primitives

Remarque Rappels. Revoir le chapitre 6.

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version faible)

Soit f continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in I$. Alors la fonction

$$F: \begin{array}{rl} I & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est de classe C^1 sur I et $F' = f$.
C'est de plus l'unique primitive de f nulle en $a \in I$.

Démonstration

Fonctions continues

Corollaire - Primitive pour une fonction continue

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Fonctions continues

Corollaire - Primitive pour une fonction continue

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Ce résultat se démontre également en restant dans le cadre des fonctions au sens de Riemann. Car toute fonction continue sur une segment est uniformément continue, elle est donc intégrable au sens de Riemman (on peut prendre une jauge constante).

Fonctions continues

Corollaire - Primitive pour une fonction continue

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Ce résultat se démontre également en restant dans le cadre des fonctions au sens de Riemann. Car toute fonction continue sur une segment est uniformément continue, elle est donc intégrable au sens de Riemman (on peut prendre une jauge constante).

Attention - Pas toutes les primitives

On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.
Un contre-exemple : pour $f(x) = \cos x$, la primitive $F(x) = \sin x + 2$ ne peut s'obtenir ainsi.

Primitives et calcul d'intégrale

Et on retrouve le résultat largement exploité en début d'année :

Théorème - Expression en fonction d'une primitive

Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b.$$

Primitives et calcul d'intégrale

Et on retrouve le résultat largement exploité en début d'année :

Théorème - Expression en fonction d'une primitive

Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b.$$

Démonstration

Primitives et calcul d'intégrale

Et on retrouve le résultat largement exploité en début d'année :

Théorème - Expression en fonction d'une primitive

Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b.$$

Démonstration

Remarque Cas des fonctions continues par morceaux.

Attention

Attention. Dérivation

Si f est continue et que $G : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, alors G est dérivable et $G'(x) = f(x)$ et non : $f(x) - f(x_0)$, comme lu souvent !

Attention

Attention. Dérivation

Si f est continue et que $G : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, alors G est dérivable et $G'(x) = f(x)$ et non : $f(x) - f(x_0)$, comme lu souvent !

Savoir-faire. Etudier $x \mapsto \displaystyle\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$

Supposons f est continue, h_1 et h_2 dérivable. Notons F une primitive de f, $G : x \mapsto \displaystyle\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\mathrm{d}t = F(h_2(x)) - F(h_1(x))$.
dérivable par composition (et soustraction) de dérivée :

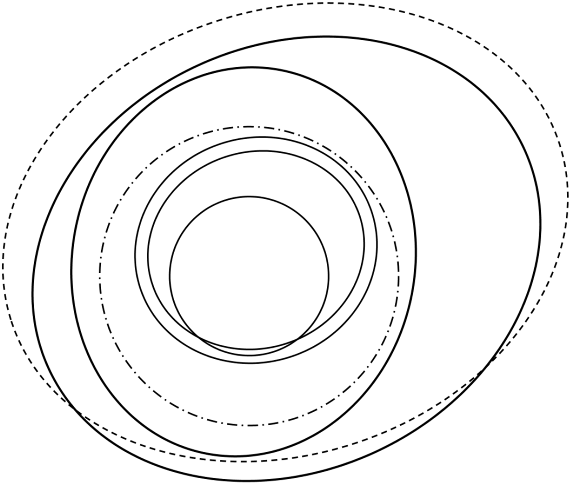
$$\begin{aligned} G'(x) &= h_2'(x) \times F'(h_2(x)) - h_1'(x) \times F'(h_1(x)) \\ &= h_2'(x) \times f(h_2(x)) - h_1'(x) \times f(h_1(x)) \end{aligned}$$

Diagramme de Wenn

Afin de visualiser les résultats en termes d'ensemble, on peut faire un diagramme de Wenn.
La forme naturelle d'un espace vectoriel n'est pas celle d'une « patate »…

- $\mathscr{B}([a,b])$
- $\mathscr{C}([a,b])$
- $\mathscr{C}_M([a,b])$
- $\mathscr{E}([a,b])$
- $\overline{\mathscr{E}([a,b])}^u$, l'ensemble des limites uniformes des fonctions en escalier
- $\mathscr{I}([a,b])$
- $\mathscr{I}_R([a,b])$

Diagramme de Wenn



Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Quelles sont les fonctions intégrables ?

$\Rightarrow$ Théorèmes fondamentaux

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- Et les fonctions en escalier sont intégrables

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- Et les fonctions en escalier sont intégrables
- Entre deux fonctions intégrables, f est intégrables.

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- Et les fonctions en escalier sont intégrables
- Entre deux fonctions intégrables, f est intégrables.
- Donc les fonctions continues par morceaux sont intégrables !

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

- Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Quelles sont les fonctions intégrables ?

$\Rightarrow$ Théorèmes fondamentaux

- Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation
- Lien avec une primitive : pour le calcul ou réciproquement, pour justifier l'existence de la primitive

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

- Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation
- Lien avec une primitive : pour le calcul ou réciproquement, pour justifier l'existence de la primitive
- Savoir-faire : étudier $x \mapsto \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration
  5. L'intégrale comme « outil puissant » de l'analyse. (fin)
- Exercice : n°675 & 695

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition des intégrales

$\Rightarrow$ Premières propriétés par passage à la limite

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition des intégrales

- Intégrale de Riemann :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

- Intégrale de Riemann :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

- Si une fonction est R-intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.
  On maitrise la vitesse de convergence si f de classe $\mathscr{C}^1$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

- Intégrale de Riemann :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

- Si une fonction est R-intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.
  On maitrise la vitesse de convergence si f de classe $\mathscr{C}^1$.
- Intégrale de Kurzweil-Henstock :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition des intégrales

- Intégrale de Riemann :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

- Si une fonction est R-intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.
  On maitrise la vitesse de convergence si f de classe $\mathscr{C}^1$.
- Intégrale de Kurzweil-Henstock :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

- A chaque fonction sa jauge d'intégration !

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- Forme linéaire, positivité, croissance.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- Forme linéaire, positivité, croissance.
- Majoration (si $|f|$ intégrable)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- Forme linéaire, positivité, croissance.
- Majoration (si $|f|$ intégrable)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition des intégrales

$\Rightarrow$ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- Forme linéaire, positivité, croissance.
- Majoration (si $|f|$ intégrable)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration
  4. Espaces et sous-espaces de fonctions intégrables
- Exercice : n°770 & 789