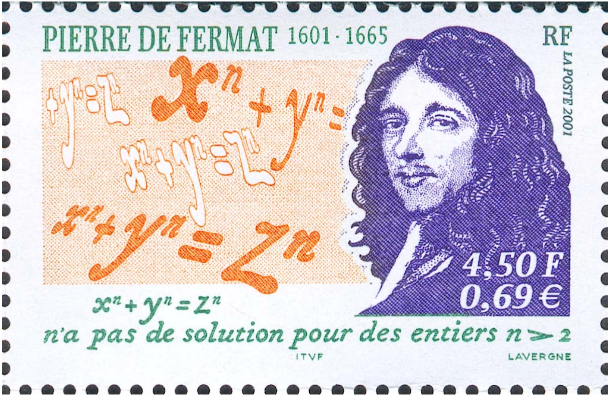

Leçon 101 - Espaces euclidiens

28 mai 2025

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

Problèmes

Problème Expérience physique

Problèmes

Problème Expérience physique

Problème Projection selon un vecteur

Problèmes

Problème Expérience physique

Problème Projection selon un vecteur

Problème Espaces orthogonaux

Problèmes

Problème Décomposition sur une base

Problèmes

Problème Décomposition sur une base

Problème Bases orthonormées

Problèmes

Problème Décomposition sur une base

Problème Bases orthonormées

Problème Dualité et problème réciproque

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

Produit scalaire. Définitions

Dans ce chapitre les espaces vectoriels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels exclusivement.

Produit scalaire. Définitions

Dans ce chapitre les espaces vectoriels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels exclusivement.

Définition - Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que ϕ est un produit scalaire sur E si ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire si ϕ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. (bilinéaire)

$$\forall (x, x', y) \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(\lambda x + \lambda x', y) = \lambda\phi(x, y) + \lambda'\phi(x', y)$$
$$\forall (x, y, y') \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda\phi(x, y) + \lambda'\phi(x, y')$$

2. (symétrique) $\quad \forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x)$
3. (positive) $\quad \forall x \in E, \phi(x, x) \geqslant 0$
4. (définie) $\quad \forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

Produit scalaire. Définitions

Dans ce chapitre les espaces vectoriels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels exclusivement.

Définition - Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que ϕ est un produit scalaire sur E si ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire si ϕ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. (bilinéaire)

$$\forall (x, x', y) \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(\lambda x + \lambda x', y) = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x', y)$$

$$\forall (x, y, y') \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x, y')$$

2. (symétrique) $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x)$
3. (positive) $\forall x \in E, \phi(x, x) \geqslant 0$
4. (définie) $\forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

Remarque Linéarité+symétrie

Espace préhilbertien

Définition - Notations

Les notations les plus usuelles sont :

$$\phi(x,y) = (x,y) = \langle x\,,\,y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle = x\cdot y$$

Espace préhilbertien

Définition - Notations

Les notations les plus usuelles sont :

$$\phi(x,y) = (x,y) = \langle x\,,\,y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle = x \cdot y$$

Définition - Espace préhilbertien réel

On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Bilinéarité

Savoir-faire. Montrer qu'on a un produit scalaire

On vérifie chacune des hypothèses...
A commencer par le fait qu'il s'agit d'une FORME (bi)linéaire.
On démontre la symétrie avant la linéarité à gauche. Comme cela, on obtient la linéarité à droite.
On démontre la forme positive avant le fait que cela soit une forme définie.

Bilinéarité

Savoir-faire. Montrer qu'on a un produit scalaire

On vérifie chacune des hypothèses...
A commencer par le fait qu'il s'agit d'une FORME (bi)linéaire.
On démontre la symétrie avant la linéarité à gauche. Comme cela, on obtient la linéarité à droite.
On démontre la forme positive avant le fait que cela soit une forme définie.

Proposition - La bilinéarité en action

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ deux familles de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ deux familles de réels. Alors

$$\langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \,|\, \sum_{j=1}^{s} \mu_j Y_j \rangle = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \lambda_i \mu_j \langle X_i \,|\, Y_j \rangle.$$

Bilinéarité

Savoir-faire. Montrer qu'on a un produit scalaire

On vérifie chacune des hypothèses...
A commencer par le fait qu'il s'agit d'une FORME (bi)linéaire.
On démontre la symétrie avant la linéarité à gauche. Comme cela, on obtient la linéarité à droite.
On démontre la forme positive avant le fait que cela soit une forme définie.

Proposition - La bilinéarité en action

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ deux familles de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ deux familles de réels. Alors

$$\langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \,|\, \sum_{j=1}^{s} \mu_j Y_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \lambda_i \mu_j \langle X_i \,|\, Y_j \rangle.$$

Démonstration

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x, y \in E$,

$$\langle x \mid y \rangle^2 \leqslant \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x, y \in E$,

$$\langle x \mid y \rangle^2 \leqslant \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Démonstration classique (parmi les 10 à connaître sur l'année).

Démonstration

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

Norme euclidienne

Définition - Norme

On appelle norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Norme euclidienne

Définition - Norme

On appelle norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
$$\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Corollaire - Propriétés directes

Plus précisément :

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $N(-x) = N(x)$
- $N(x) \geqslant 0$

Norme euclidienne

Définition - Norme

On appelle norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
$$\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Corollaire - Propriétés directes

Plus précisément :

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $N(-x) = N(x)$
- $N(x) \geqslant 0$

Démonstration

Majoration de la différence

Proposition - Inégalité triangulaire revisitée

Soit N une norme sur E, alors

$$\forall (x,y) \in E^2, \left| N(x) - N(y) \right| \leqslant N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

Majoration de la différence

Proposition - Inégalité triangulaire revisitée

Soit N une norme sur E, alors

$$\forall (x,y) \in E^2, \; \big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

Démonstration

Vecteurs unitaires ou normés

Définition - Vecteur unitaire

Soit N une norme sur E. Un vecteur x de E est dit unitaire (ou normé) si $N(x) = 1$.

Espaces métriques

Définition - Distance associée (et proposition)

Si N est une norme sur E, l'application

$$\begin{array}{lll} d & : E^2 & \to \mathbb{R}_+ \\ & (A,B) & \mapsto N(B-A) \end{array}$$

est appelée distance associée à la norme N et vérifie

- $\forall (A,B) \in E^2, d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\forall (A,B) \in E^2, d(A,B) = d(B,A)$
- $\forall (A,B,C) \in E^3, d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$

Espaces métriques

Définition - Distance associée (et proposition)

Si N est une norme sur E, l'application

$$\begin{array}{llll} d & : E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (A,B) & \mapsto & N(B-A) \end{array}$$

est appelée distance associée à la norme N et vérifie

- $\forall (A,B) \in E^2, d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\forall (A,B) \in E^2, d(A,B) = d(B,A)$
- $\forall (A,B,C) \in E^3, d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$

Démonstration

Norme et produit scalaire

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$ alors l'application

$$E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

est une norme sur E. On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

Norme et produit scalaire

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$ alors l'application

$$E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$$

est une norme sur E. On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

Remarque - Inégalité de Minkowski

Norme et produit scalaire

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$ alors l'application

$$E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$$

est une norme sur E. On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

Remarque - Inégalité de Minkowski

Démonstration

Norme et produit scalaire

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$ alors l'application

$$E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$$

est une norme sur E. On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

Remarque - Inégalité de Minkowski

Démonstration

Exercice

Soit E un espace préhilbertien. Dans quel cas a-t-on $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ (l'égalité triangulaire) ?

Réécriture d'inégalités

Corollaire - Inégalités (Cauchy-Schwarz, Minkowski) avec des normes

Soit E, un espace préhilbertien : $\forall (x,y) \in E^2, |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$,
avec égalité si et seulement si (x,y) est une famille liée.

Et $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
avec égalité si et seulement si (x,y) est positivement liée.

Produits scalaires et normes usuelles

Savoir-faire. Montrer qu'on a une norme

On vérifie chacune des hypothèses. . .
Ou bien : on démontre que la norme dérive d'un produit scalaire bien connu (ou démontré).

Produits scalaires et normes usuelles

Savoir-faire. Montrer qu'on a une norme

On vérifie chacune des hypothèses...
Ou bien : on démontre que la norme dérive d'un produit scalaire bien connu (ou démontré).

Proposition - Produits scalaires usuels et normes associées

On définit des produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, et sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, en posant :

- sur $\mathbb{R}^n$, avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$,
$$\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$
- sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,
$$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}$$

Démonstration

Produits scalaires et normes usuelles

Savoir-faire. Montrer qu'on a une norme

On vérifie chacune des hypothèses...
Ou bien : on démontre que la norme dérive d'un produit scalaire bien connu (ou démontré).

Proposition - Produits scalaires usuels et normes associées

On définit des produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, et sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, en posant :

- sur $\mathbb{R}^n$, avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$,
  $$\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$
- sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,
  $$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}$$

Démonstration

Exemple Application de ces inégalités

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Polaristaion

Théorème - Identités

Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$ et $\|.\|$ la norme associée. Pour $(x, y) \in E^2$ on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle$$
$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Les trois premières égalités sont appelées « identités de polarisation »(elles permettent de récupérer le produit scalaire à partir de la norme) et la quatrième « égalité du parallélogramme »

Polaristaion

Théorème - Identités

Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$ et $\|.\|$ la norme associée. Pour $(x,y) \in E^2$ on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \,|\, y\rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \,|\, y\rangle$$

$$\langle x \,|\, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Les trois premières égalités sont appelées « identités de polarisation »(elles permettent de récupérer le produit scalaire à partir de la norme) et la quatrième « égalité du parallélogramme »

Démonstration

Exercices

Remarque Identité de polarisation

Exercices

Remarque Identité de polarisation

Savoir-faire. Montrer qu'une norme est euclidienne

La polarisation donne une expression d'une forme bilinéaire qui nécessairement est à l'origine de la norme, si celle-ci est bien euclidienne. Il s'agit de vérifier chacun des points pour cette forme : $\langle x\,,\,y\rangle := \frac{1}{2}(N(x+y)-N(x)-N(y))$ (ou $\frac{1}{4}N(x+y)-N(x-y))$. C'est sur la linéarité qu'on peut avoir des difficultés...

Exercices

Remarque Identité de polarisation

Savoir-faire. Montrer qu'une norme est euclidienne

La polarisation donne une expression d'une forme bilinéaire qui nécessairement est à l'origine de la norme, si celle-ci est bien euclidienne. Il s'agit de vérifier chacun des points pour cette forme : $\langle x\,,\,y\rangle := \frac{1}{2}(N(x+y)-N(x)-N(y))$ (ou $\frac{1}{4}N(x+y)-N(x-y))$. C'est sur la linéarité qu'on peut avoir des difficultés...

Pour l'exercice suivant, on fera attention à ne pas confondre vecteur x, y et coordonnées x, y...

Exercice

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $Q(x,y)=2x^2+5y^2-2xy$. Montrer que Q est le carré d'une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exercices

Remarque Identité de polarisation

Savoir-faire. Montrer qu'une norme est euclidienne

La polarisation donne une expression d'une forme bilinéaire qui nécessairement est à l'origine de la norme, si celle-ci est bien euclidienne. Il s'agit de vérifier chacun des points pour cette forme : $\langle x\,,\,y\rangle := \frac{1}{2}(N(x+y)-N(x)-N(y))$ (ou $\frac{1}{4}N(x+y)-N(x-y))$. C'est sur la linéarité qu'on peut avoir des difficultés...

Pour l'exercice suivant, on fera attention à ne pas confondre vecteur x, y et coordonnées x, y...

<u>Exercice</u>

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $Q(x,y)=2x^2+5y^2-2xy$. Montrer que Q est le carré d'une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Exercice</u>

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $\|(x,y)\|_\infty=\max(|x|,|y|)$. Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, non euclidienne.

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

- Forme bilinéaire symétrique positive et définie

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

- Forme bilinéaire symétrique positive et définie
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x \mid y \rangle|^2 \leqslant \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

$\Rightarrow$ Normes et normes euclidiennes

- Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

- Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire
- Un espace normé est un espace métrique (muni d'une distance).

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

- Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire
- Un espace normé est un espace métrique (muni d'une distance).
- Un espace euclidien est un espace normé. On peut choisir la norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

- Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire
- Un espace normé est un espace métrique (muni d'une distance).
- Un espace euclidien est un espace normé. On peut choisir la norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.
- Des applications usuelles à connaître (sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathscr{C}([a,b])$).

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

$\Rightarrow$ Normes et normes euclidiennes

- Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire
- Un espace normé est un espace métrique (muni d'une distance).
- Un espace euclidien est un espace normé. On peut choisir la norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.
- Des applications usuelles à connaître (sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathscr{C}([a,b])$).
- On peut revenir de la norme au produit scalaire : polarisation.

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espaces euclidiens

  3. Orthogonalité

- Exercice : N°549 & 551