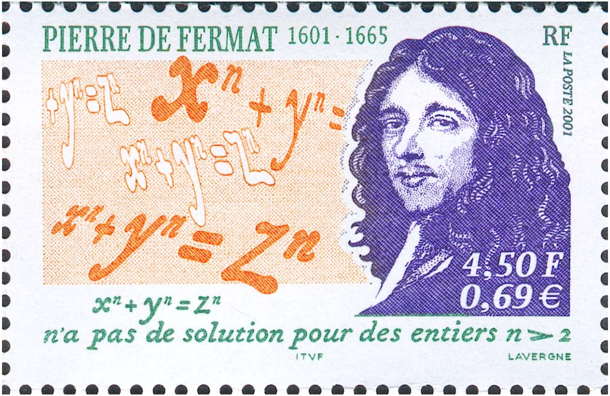

Leçon 102 - Espaces euclidiens

3 juin 2025

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

Vecteurs orthogonaux

E désigne un espace préhilbertien réel.

Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient x et y deux vecteurs de E. x et y sont dits orthogonaux si $\langle x \,|\, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Vecteurs orthogonaux

E désigne un espace préhilbertien réel.

Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient x et y deux vecteurs de E. x et y sont dits orthogonaux si $\langle x \mid y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Théorème - Pythagore

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Vecteurs orthogonaux

E désigne un espace préhilbertien réel.

Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient x et y deux vecteurs de E. x et y sont dits orthogonaux si $\langle x \mid y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Théorème - Pythagore

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

Vecteurs orthogonaux

E désigne un espace préhilbertien réel.

Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient x et y deux vecteurs de E. x et y sont dits orthogonaux si $\langle x \mid y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Théorème - Pythagore

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

Exercice

Montrer que dans $\mathscr{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, $\sin \perp \cos$.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

Espaces orthogonaux

Définition - Espace orthogonaux

Soient F et G deux s.e.v de E. F et G sont dits orthogonaux si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y.$$ On note alors $F \perp G$.

Espaces orthogonaux

Définition - Espace orthogonaux

Soient F et G deux s.e.v de E. F et G sont dits orthogonaux si $\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y$. On note alors $F \perp G$.

Proposition - Résultats directs

Soient F et G deux s.e.v de E.

- Si $F \perp G$ alors $F \cap G = \{0_E\}$.
- Si $F = \text{vect}(f_1, \dots, f_n)$ et $G = \text{vect}(g_1, \dots, g_p)$ alors $(F \perp G) \Leftrightarrow (\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], f_i \perp g_j)$.

Espaces orthogonaux

Définition - Espace orthogonaux

Soient F et G deux s.e.v de E. F et G sont dits orthogonaux si $\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y$. On note alors $F \perp G$.

Proposition - Résultats directs

Soient F et G deux s.e.v de E.

- Si $F \perp G$ alors $F \cap G = \{0_E\}$.
- Si $F = \mathrm{vect}(f_1, \ldots, f_n)$ et $G = \mathrm{vect}(g_1, \ldots, g_p)$ alors $(F \perp G) \Leftrightarrow (\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], f_i \perp g_j)$.

Démonstration

L'espace orthogonal

Définition - « Le »espace orthogonal

Soit F un s.e.v de E. On appelle orthogonal de F, et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$ est un sev de E. Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à F pour la la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

L'espace orthogonal

Définition - « Le »espace orthogonal

Soit F un s.e.v de E. On appelle orthogonal de F, et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$ est un sev de E. Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à F pour la la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

Démonstration

L'espace orthogonal

Définition - « Le »espace orthogonal

Soit F un s.e.v de E. On appelle orthogonal de F, et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$ est un sev de E. Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à F pour la la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

Démonstration

Proposition - Propriétés de l'orthogonal

Soient F, G deux s.e.v de E. Alors

$$F \subset (F^\perp)^\perp;$$

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp.$$

L'espace orthogonal

Définition - « Le »espace orthogonal

Soit F un s.e.v de E. On appelle orthogonal de F, et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F :

$$F^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$ est un sev de E. Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à F pour la la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

Démonstration

Proposition - Propriétés de l'orthogonal

Soient F, G deux s.e.v de E. Alors

$$F \subset (F^\perp)^\perp;$$

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp.$$

Démonstration

L'espace orthogonal

Définition - « Le »espace orthogonal

Soit F un s.e.v de E. On appelle orthogonal de F, et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F :

$$F^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$ est un sev de E. Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à F pour la la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

Démonstration

Proposition - Propriétés de l'orthogonal

Soient F, G deux s.e.v de E. Alors

$$F \subset (F^\perp)^\perp;$$

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp.$$

Démonstration

Remarque A-t-on $F = (F^\perp)^\perp$?

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

Intérêt des bases orthonormales

Heuristique - Intérêt des bases orthonormales

Lorsqu'on connait une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ d'un espace vectoriel E, on écrit régulièrement :

« *si* $x \in E$*, alors* x *s'écrit* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \dots$ ».

Ce qui serait bien ce serait de pouvoir faire « un truc »qui nous permette d'avoir accès à x_i à partir de x et de la base $\mathscr{B}$.

Ce truc, ou opération devrait pouvoir affirmer :

coordonnée du vecteur e_i *dans la base* (e_k) *: 1 si* $k = i$ *et* 0 *si* $k \neq i$.

C'est exactement ce que propose un produit scalaire, pour une base orthonormale

Famille orthogonale

Définition - Famille orthogonale - orthonormale

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{F}$ est orthogonale si $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$,
et que $\mathscr{F}$ est orthonormale (orthonormée) si elle est orthogonale et $\forall i \in I, \|u_i\| = 1$.

Famille orthogonale

Définition - Famille orthogonale - orthonormale

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{F}$ est orthogonale si $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$,
et que $\mathscr{F}$ est orthonormale (orthonormée) si elle est orthogonale et $\forall i \in I, \|u_i\| = 1$.

Exercice

Montrer que pour le produit scalaire :
$\langle P \mid Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, la base $((X-a)^k)_k$ est une base orthogonale.
Retrouver la formule de Taylor

Orthogonalité implique liberté

Proposition - Famille libre

Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille finie orthonormale est libre.

Orthogonalité implique liberté

Proposition - Famille libre

Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille finie orthonormale est libre.

Démonstration

Orthogonalité implique liberté

Proposition - Famille libre

Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille finie orthonormale est libre.

Démonstration

Proposition - Pythagore (généralisé)

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. On a

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2.$$

Orthogonalité implique liberté

Proposition - Famille libre

Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille finie orthonormale est libre.

Démonstration

Proposition - Pythagore (généralisé)

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. On a

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 .$$

Démonstration

Algorithme de Schmidt

Proposition - Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'un produit scalaire et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.

On définit la famille $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ par

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

$$\forall i \in [\![2, p]\!],\ f_i = \frac{1}{\|e'_i\|} e'_i \text{ où } e'_i = e_i - \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \langle e_i \,|\, f_j \rangle f_j$$

Alors $\mathscr{F}$ est une famille orthonormale de E telle que

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \operatorname{vect}(f_1, \ldots, f_k) = \operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_k).$$

On dit que $\mathscr{F}$ est déduite de $\mathscr{E}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Algorithme de Schmidt

Proposition - Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'un produit scalaire et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.

On définit la famille $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ par

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

$$\forall i \in [\![2, p]\!], f_i = \frac{1}{\|e'_i\|} e'_i \text{ où } e'_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle e_i \mid f_j \rangle f_j$$

Alors $\mathscr{F}$ est une famille orthonormale de E telle que

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \mathrm{vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_k).$$

On dit que $\mathscr{F}$ est déduite de $\mathscr{E}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Démonstration

Application

Remarque Cette famille est-elle unique ?

Application

Remarque Cette famille est-elle unique ?

Savoir-faire. Orthonomaliser une base

Pour obtenir une base orthonormalisée, on considère une base de E.
On commence par l'orthogonaliser, puis la normaliser à chaque étape.
Au final e'_i est la soustraction de e_i, du projeté orthogonal de e_i sur $\mathrm{vect}(e_j)_{j<i}$.

Application

Remarque Cette famille est-elle unique ?

Savoir-faire. Orthonomaliser une base

Pour obtenir une base orthonormalisée, on considère une base de E.

On commence par l'orthogonaliser, puis la normaliser à chaque étape.

Au final e'_i est la soustraction de e_i, du projeté orthogonal de e_i sur $\mathrm{vect}(e_j)_{j<i}$.

<u>Exercice</u>

Vérifier que l'on munit $\mathbb{R}_2[X]$ d'un produit scalaire en posant $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

Déterminer une b.o.n. de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

Espace euclidien

Définition - Espace euclidien

Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, muni d'un produit scalaire (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie).

Espace euclidien

Définition - Espace euclidien

Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, muni d'un produit scalaire (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie).

Exemple Retour sur les deux produits canoniques

Point de vue matriciel

Proposition - Ecriture matricielle

Soit E est un espace euclidien muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
On note A la matrice

$$A = \left(\langle e_i \mid e_j \rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \ldots & \langle e_1 \mid e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n \mid e_1 \rangle & \ldots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

appelée matrice du produit scalaire dans la base $\mathscr{B}$.
Soient X et Y les matrices colonnes de $x \in E$ et de $y \in E$ dans $\mathscr{B}$.
En identifiant une matrice d'ordre 1 à son coefficient, on a
$\langle x \mid y \rangle = {}^tXAY$

Point de vue matriciel

Proposition - Ecriture matricielle

Soit E est un espace euclidien muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
On note A la matrice

$$A = \left(\langle e_i \mid e_j \rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \dots & \langle e_1 \mid e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n \mid e_1 \rangle & \dots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

appelée <u>matrice du produit scalaire dans la base $\mathscr{B}$</u>.
Soient X et Y les matrices colonnes de $x \in E$ et de $y \in E$ dans $\mathscr{B}$.
En identifiant une matrice d'ordre 1 à son coefficient, on a $\langle x \mid y \rangle = {}^tXAY$

<u>Exercice</u>
Que dire de $\mathscr{B}$ si $A = I_n$?

Point de vue matriciel

Proposition - Ecriture matricielle

Soit E est un espace euclidien muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On note A la matrice

$$A = \left(\langle e_i \mid e_j \rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \ldots & \langle e_1 \mid e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n \mid e_1 \rangle & \ldots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

appelée matrice du produit scalaire dans la base $\mathscr{B}$.
Soient X et Y les matrices colonnes de $x \in E$ et de $y \in E$ dans $\mathscr{B}$.
En identifiant une matrice d'ordre 1 à son coefficient, on a $\langle x \mid y \rangle = {}^t X A Y$

Exercice
Que dire de $\mathscr{B}$ si $A = I_n$?

Démonstration

Propriétés de la matrice d'un produit scalaire

Proposition - Propriétés de la matrice d'un produit scalaire

Soit A la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque. Alors

- A est une matrice symétrique : ${}^tA = A$;
- A est une matrice *positive* : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geqslant 0$;
- A est une matrice *définie* :
$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = O_{n,1} ;$$
- A est inversible : $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Propriétés de la matrice d'un produit scalaire

Proposition - Propriétés de la matrice d'un produit scalaire

Soit A la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque. Alors

- A est une matrice symétrique : ${}^tA = A$;
- A est une matrice *positive* : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geqslant 0$;
- A est une matrice *définie* :
$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = O_{n,1} ;$$
- A est inversible : $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Remarque et exercice

Remarque Toutes les propriétés essentielles du produit scalaire

Remarque et exercice

Remarque Toutes les propriétés essentielles du produit scalaire

Exercice

Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont des réels strictement positifs.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

Existence de bases orthonormales

Définition - Base orthonormale

$\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E euclidien si $\mathscr{B}$ est une base de E et une famille orthonormale.

Existence de bases orthonormales

Définition - Base orthonormale

$\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E euclidien si $\mathscr{B}$ est une base de E et une famille orthonormale.

Exemple Base canonique

Existence de bases orthonormales

Définition - Base orthonormale

$\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E euclidien si $\mathscr{B}$ est une base de E et une famille orthonormale.

Exemple Base canonique

Théorème - Existence de bases orthonormales

- Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.
- Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Existence de bases orthonormales

Définition - Base orthonormale

$\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E euclidien si $\mathscr{B}$ est une base de E et une famille orthonormale.

Exemple Base canonique

Théorème - Existence de bases orthonormales

- Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.
- Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Démonstration

Exercice

<u>Exercice</u>

Réciproquement, étant donné une base $\mathscr{B}$ de E, $\mathbb{R}$-ev. Existe-t-il un produit scalaire de E telle que la base $\mathscr{B}$ soit orthonormales ?

Exploiter la matrice

Savoir-faire. Montrer qu'une famille est une base orthonormée

De même que pour savoir si une famille est une base, on exploite la matrice de cette famille ; pour montrer qu'une famille est une base orthonormale, on peut commencer par écrire sa matrice de corrélation : $A = (\langle e_i , e_j \rangle)_{i,j}$.

A est symétrique. Elle est inversible ssi (e_i) est une base.

Aest diagonale ssi (e_i) est orthogonale.

$A = I_n$ ssi (e_i) est une base orthonormale.

Utilisation d'une b.o.n.

Proposition - Calculs en b.o.n

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E euclidien (pour le produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$).

Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E, X et Y les matrices colonnes associées. Alors :

$$\langle x \,|\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \langle x \,|\, e_i \rangle$$

Changement de bases orthonormales

Proposition - Opération matricielle de changement de base orthonormale

Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E euclidien de dimension n, $\mathscr{B}'$ une famille de n vecteurs de E, et P la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.
Alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de E si et seulement si ${}^tPP = I_n$.
Dans ce cas on a donc $P^{-1} = {}^tP$ (on dit que P est une matrice orthogonale).

Changement de bases orthonormales

Proposition - Opération matricielle de changement de base orthonormale

Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E euclidien de dimension n, $\mathscr{B}'$ une famille de n vecteurs de E, et P la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.
Alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de E si et seulement si ${}^tPP = I_n$.
Dans ce cas on a donc $P^{-1} = {}^tP$ (on dit que P est une matrice orthogonale).

Remarque Matrice de passage

Changement de bases orthonormales

Proposition - Opération matricielle de changement de base orthonormale

Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E euclidien de dimension n, $\mathscr{B}'$ une famille de n vecteurs de E, et P la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.
Alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de E si et seulement si ${}^tPP = I_n$.
Dans ce cas on a donc $P^{-1} = {}^tP$ (on dit que P est une matrice orthogonale).

Remarque Matrice de passage

Démonstration

Savoir-faire

Savoir-faire. Changement de base bilinéaire

Soit E un espace euclidien et deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
Si x a pour coordonnées X dans $\mathscr{B}$ et X' dans $\mathscr{B}'$.
Si y a pour coordonnées Y dans $\mathscr{B}$ et Y' dans $\mathscr{B}'$.
On note A et A' la matrices du produit scalaire dans chacune des bases.
Enfin, on note P la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.
On a alors $X = PX', Y = PY'$.

$$\langle x \,|\, y\rangle = {}^t XAY = {}^t X'A'Y' = {}^t X'{}^tPA'PY'$$

Ceci étant vrai pour tout x, y, on a donc nécessairement $A = {}^t PA'P$.
Ce résultat reste vraie que les bases sont orthonormales ou non

Exercices

<u>Exercice</u>

$E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}$ base canonique. On pose $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ où

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3),\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3),\ f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de E (pour le produit scalaire canonique).

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$.

Donner la matrice de f dans cette base.

Exercices

Exercice

$E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}$ base canonique. On pose $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ où

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3),\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3),\ f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de E (pour le produit scalaire canonique).
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$.
Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice

Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

- $F \perp G$ ssi $\forall\, x \in F, y \in G, x \perp y$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

- $F \perp G$ ssi $\forall\, x \in F, y \in G,\ x \perp y$.
- Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

- $F \perp G$ ssi $\forall\ x \in F, y \in G, x \perp y$.
- Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.
- On a la définition de l'espace supplémentaire :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall\ y \in F, x \perp y\}$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

- $F \perp G$ ssi $\forall\ x \in F, y \in G, x \perp y$.
- Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.
- On a la définition de l'espace supplémentaire :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall\ y \in F, x \perp y\}$$

- Une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 est une famille libre.

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

- $F \perp G$ ssi $\forall\ x \in F, y \in G, x \perp y$.
- Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.
- On a la définition de l'espace supplémentaire :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall\ y \in F, x \perp y\}$$

- Une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 est une famille libre.
- On parle de famille orthonormée si les vecteurs sont normés et orthogonaux 2 à 2.

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

- $F \perp G$ ssi $\forall\ x \in F, y \in G, x \perp y$.
- Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.
- On a la définition de l'espace supplémentaire :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall\ y \in F, x \perp y\}$$

- Une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 est une famille libre.
- On parle de famille orthonormée si les vecteurs sont normés et orthogonaux 2 à 2.
- Procédure de Schmidt : transformer une famille libre en famille orthogonale engendrant les mêmes espaces. . .

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

- Définition : bases orthonormales

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Orthogonalité

$\Rightarrow$ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

- Définition : bases orthonormales
- Définitions : matrices symétriques, définies, positives

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

- Définition : bases orthonormales
- Définitions : matrices symétriques, définies, positives
- Considérons une famille (e_i).
  Toutes les informations sont dans $(\langle e_i , e_j \rangle)_{i,j}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espaces euclidiens
  5. Projections orthogonales
- Exercices : N°548& 556
- TD de jeudi :
  - 8h-10h : n°550, 554, 558, 557, 567
  - 10h-12h : n°552, 555, 561, 562, 565